Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

# Eksamensoppgave i
# MA0301 Elementær diskret matematikk – løsningsforslag

**Faglig kontakt under eksamen:** Martin Strand

**Tlf:** 970 27 848

**Eksamensdato:** 23. mai 2014

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00–13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

**Annen informasjon:**
Alle svar skal begrunnes. Ta med så mye mellomregning og forklaring at det er enkelt å forstå hvordan du har tenkt.

Oppgavesettet består av ti punkter, og hvert punkt teller like mye.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 8

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

Dato Sign

**Oppgave 1** Hvor mange ord kan du lage av bokstavene i ordet MYGGSTIKK? I hvor mange av disse står begge G-ene ved siden av hverandre?

*Løsning.* Det er ni tegn som skal permuteres, men siden vi ikke kan se forskjell på G-ene og K-ene, må vi ta høyde for det. Da blir det

$$\frac{9!}{2!\,2!} = 90720$$

mulige ord.

Dersom vi setter G-ene ved siden av hverandre, kan vi regne dem som ett tegn, så vi skal permutere åtte tegn, der vi ikke ser forskjell på K-ene, altså

$$\frac{8!}{2!} = 20160$$

forskjellige ord. □

**Oppgave 2** Er dette et gyldig argument?

$$(p \to r) \land (p \lor q) \land (q \to s) \land (\neg r) \to s$$

*Løsning.* Ja. Siden $p \to r$ og $\neg r$, så har vi $\neg p$, men siden $p \lor q$ er sann, må da $q$ være sann. Vi har da $q \to s$, så da må $s$ også være sann, så $s$ er alltid sann når uttrykket på venstre side er sant.

Oppgaven kan også løses ved hjelp av en sannhetstabell. □

**Oppgave 3** La $A$ være en mengde, og la $\mathcal{P}(A)$ være potensmengden til $A$. Vis at $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

*Løsning.* I faget har vi ofte brukt to løsninger. I tillegg finnes det (minst) en tredje som også kan brukes.

i. Hvis vi skal konstruere en delmengde av $A$, kan vi gjøre det ved ta for oss ett og ett element i $A$, og velge om det skal være med eller ikke. Da gjør vi $|A|$ ja/nei-valg, så ved telleteknikkene blir det $2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2$ mulige valg som kan gjøres, og det er akkurat $2^{|A|}$.

ii. Si at $|A| = n$. Alle delmengdene er alle delmengder av størrelse 0, størrelse 1, ..., størrelse $n$. Det kan vi uttrykket ved hjelp av binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

og ved binomialteoremet blir det $(1+1)^n = 2^n$.

iii. Ved induksjon. Dersom $A$ er tom, har den bare én undermengde, den tomme mengden, og $2^0 = 1$, så basistilfellet holder. Anta at påstanden holder for $|A| = k$, altså at $|\mathcal{A}| = 2^k$, og betrakt en mengde $B = A \cup \{x\}$, som da altså har $k+1$ elementer. Delmengdene av $B$ kan deles inn i to grupper: De som inneholder $x$, og de som ikke gjør det. De som ikke gjør det, er akkurat delmengdene av $A$, og av dem er det $2^k$. De øvrige er alle delmengdene av $A$ med $x$ i tillegg, så det er også $2^k$ av dem. Dermed blir det

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

undermengder, og det vi skulle vise følger ved induksjon.

$\square$

**Oppgave 4** Bevis ved induksjon at

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

holder for alle positive heltall.

*Løsning.* For $n = 1$ er det klart at $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, så basistilfellet holder. Anta at

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

og betrakt så summen $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$. Ved hjelp av induksjonshypotesen vil vi vise at denne er lik $(k+1)(k+2)/2$.

Legg merke til at de første $k$ leddene er lik $k(k+1)/2$ ved induksjonshypotesen, så vi har da

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

som vi ønsket. $\square$

**Oppgave 5** La $\mathbb{Z}$ være heltallene, og la $\mathbb{Q}$ være alle brøker. Husk at $\mathbb{Z}-\{0\}$ betyr alle heltall unntatt null, og la $f : \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\}) \to \mathbb{Q}$ være funksjonen gitt ved

$$f(a,b) = \frac{a}{b}.$$

Er $f$

i. injektiv?

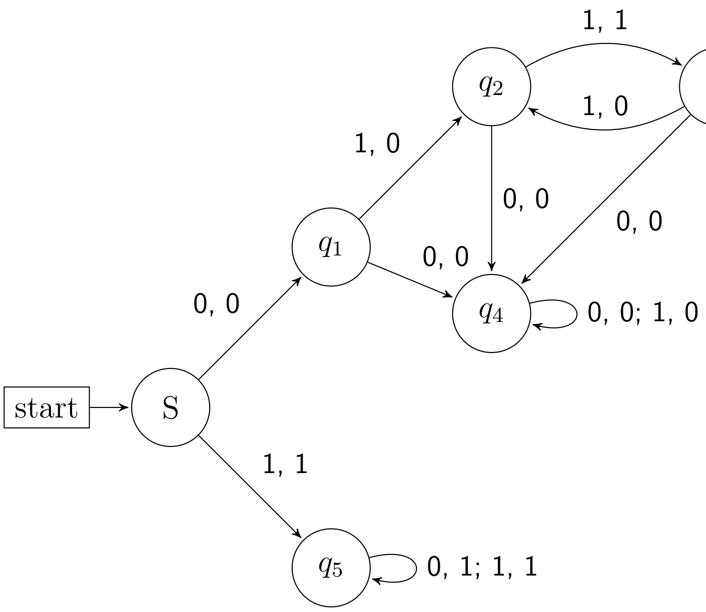
ii. surjektiv?

*Løsning.* Funksjonen $f$ er ikke injektiv, for eksempel er $f(4,2) = f(2,1) = 2$

Derimot er $f$ surjektiv. La $x \in \mathbb{Q}$. Da er $x = \frac{p}{q}$ for to heltall $p$ og $q$, så da er $x = f(p,q)$. $\square$

**Oppgave 6** Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner alle ordene i språket

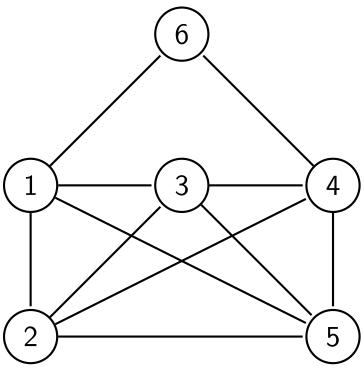
$$\{01\}\{11\}^*\{1\} \cup \{1\}\{0,1\}^*$$



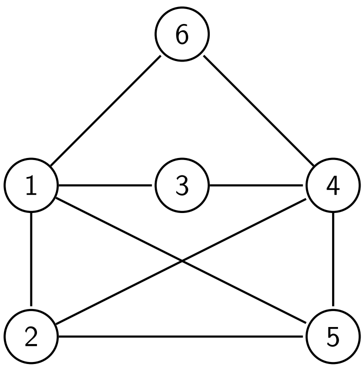

*Løsning.* □

**Oppgave 7** Hva er en elementær oppdeling (*elementary subdivision*)? Hva vil det si at to grafer er homeomorfe? Avgjør om grafene under er planare eller ikke.

$G_1$:




$G_2$:



*Løsning.* En elementær oppdeling er en prosess der man (i) sletter en kant mellom to hjørner $p$ og $q$, (ii) setter inn et nytt hjørne $r$, og (iii) oppretter to nye kanter, en fra $p$ til $r$ og en fra $r$ til $q$. Essensielt sett setter man inn en nytt hjørne på en eksisterende kant.

To grafer er homeomorfe dersom de begge er resultatet av en serie elementære oppdelinger fra et felles utgangspunkt.

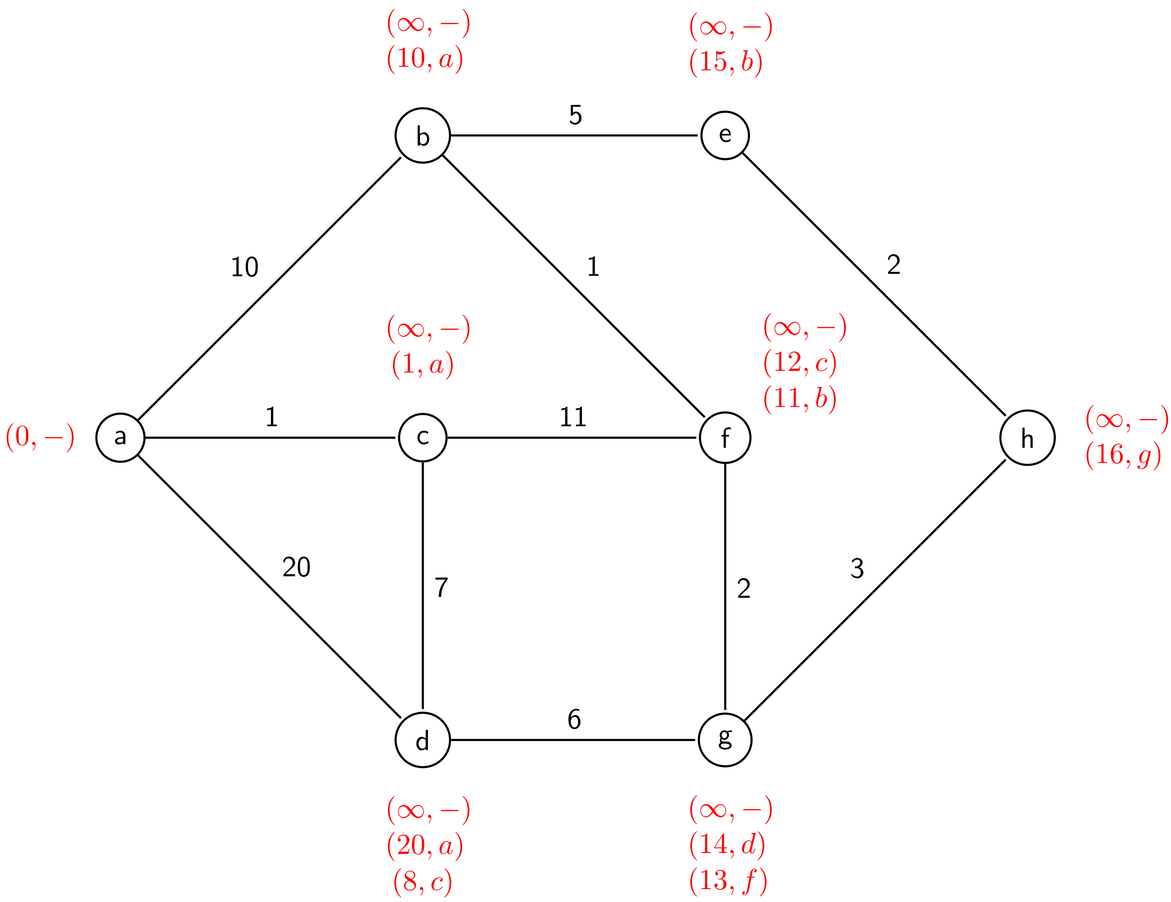
Den første grafen i oppgaven er homeomorf til $K_5$, og ved Kuratowskis teorem er den da ikke planar. Den eneste elementære oppdelingen som er gjort fra $K_5$ er at hjørnet merket med 6 er satt inn på kanten mellom 1 og 4.

Grafen $G_2$ er planar, fordi vi kan tegne kanten mellom 1 og 5 (eller 2 og 4) rundt ”boksen”, slik at den ikke krysser den andre diagonalen. □

**Oppgave 8** Finn korteste vei fra $a$ til $h$ i denne grafen, ved hjelp av Dijkstras algoritme. Du trenger ikke å forklare hvert steg i detalj, men oppgi alle etikettene på hjørnene, samt en beskrivelse av korteste vei og hvor lang den er.

*Løsning.* Koreste vei går $a \to b \to f \to g \to h$, og er av lengde 16.

□




**Oppgave 9** Definer relasjonen $\sim$ på $\mathbb{Z}$ ved $a \sim b$ dersom $a - b$ er delelig med 5, altså at $\frac{a-b}{5}$ er et heltall.

**a)** i. Hva er en ekvivalensrelasjon?

ii. Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

iii. Beskriv ekvivalensklassene til $\sim$. Hvor mange ekvivalensklasser er det?

*Løsning.* i. En ekvivalensrelasjon er en relasjon som er symmetrisk, refleksiv og transitiv.

ii. Refleksivitet: For hver $a \in \mathbb{Z}$ er $a - a = 0$, og 0 er delelig på 5, så $a \sim a$. Symmetri: Anta at $a \sim b$, altså at $a - b$ er delelig på 5, eller $a - b = 5k$ for en $k$. Da er $b - a = -(a - b) = -5k$, som fortsatt er delelig på 5, så $b \sim a$.

For transitivitet, anta at $a \sim b$ og $b \sim c$. Da er $a - b = 5k$ og $b - c = 5l$, for heltall $k$ og $l$. Da blir $(a-b)+(b-c) = a - c = 5k + 5l = 5(k+l)$, som er et heltall, så dermed er $a \sim c$. Per definisjon er da $\sim$ en ekvivalensrelasjon.

iii. Ekvivalensklassene:

(a) $[1] = \{\ldots, -4, 1, 6, \ldots\}$, eller alle tall på formen $5k+1$, alternativt alle tall som har 1 til rest når de blir delt på 5.

(b) $[2] = \{\ldots, -3, 2, 7, \ldots\}$, eller alle tall på formen $5k+2$, alternativt alle tall som har 2 til rest når de blir delt på 5.

(c) (...)

(d) $[5] = \{\ldots, -5, 0, 5, \ldots\}$, eller alle tall på formen $5k+0$, alternativt alle tall som har 0 til rest når de blir delt på 5.

Totalt blir det 5 ekvivalensklasser.

$\square$

La $\mathcal{R}_1$ være ekvivalensklassen til 1, $\mathcal{R}_2$ være ekvivalensklassen til 2, og så videre. Husk at en representant for en ekvivalensklasse er et element i klassen, og at en klasse kan ha mange representanter.

**b)** La $x$ og $y$ være vilkårlige heltall. Begge er da representanter for sin ekvivalensklasse. I hvilken av ekvivalensklassene $\mathcal{R}_1$ til $\mathcal{R}_5$ ligger da $x + y$? Hva med $x \cdot y$?

*Hint:* Prøv deg først fram med noen tilfeldig valgte tall, og sjekk hvilken klasse summen av dem kommer i. Kan du se et mønster, og klarer du å beskrive mønsteret? En fullstendig besvarelse av oppgaven krever en helt presis beskrivelse og forklaring.

*Løsning.* Anta at $x = 5k + i$, $y = 5l + j$, der $i$ og $j$ er heltall mellom 1 og 5. Da er $x$ og $i$ representater for samme ekvivalensklasse, ditto med $y$ og $j$. Vi har da

$$x + y = 5k + i + 5l + j = 5(k+l) + (i+j)$$

så $x + y$ og $i + j$ er representanter for samme ekvivalensklasse. Dersom $i + j$ er mellom 1 og 5, kan vi slå fast at $x + y \in [i + j]$. Hvis $i + j$ blir større enn 5, kan vi enkelt bare flytte en femmer over i første ledd, og da er $x + y \in [i + j - 5] = [i + j]$.

For multiplikasjon må man regne ut

$$x \cdot y = (5k+i)(5l+j) = 5kl + 5kj + 5li + ij = 5(kl+kj+li) + ij$$

så $xy \in [ij]$.

Med andre ord er det kun resten når et tall blir dividert på 5 som avgjør hvilken klasse en sum eller et produkt kommer i. $\square$