



Alle svar må begrunnes.

Relasjoner

Oppgave 1 (9 poeng)

La

$$A := \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

og la R være slik at $(x, y) \in R$ hvis og bare hvis $x < y$.

Vis at R har to av de tre egenskapene en relasjon må ha for å være en partiell ordning. Hva må legges til for å få en partiell ordning?

Oppgave 2 (9 poeng)

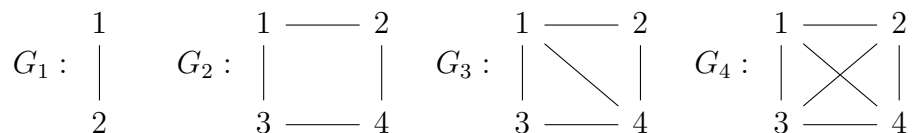
Husk at for en mengde A er $\mathcal{P}(A)$ potensmengden til A .

Tegn hassediagrammet til den partielle ordningen R på mengden $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ hvor $(X, Y) \in R$ hvis og bare hvis $X \subseteq Y$.

Grafer

Oppgave 3 (6 poeng)

Hvilke av de følgende fire grafene har en eulervei som ikke er en krets?



Oppgave 4

Veigrafen på n hjørner kan defineres som $P_n := (V, E)$ med

$$V := \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

og E bestående av alle undermengder av V på formen $\{i, i+1\}$ for $1 \leq i \leq n-1$.

a) (5 poeng) Tegn de første tre veigrafene. Altså, tegn P_n for $n = 1, 2, 3$.

b) (9 poeng) Vis at P_n har en eulervei for alle $n \geq 1$.

Logikk

Oppgave 5

- a) (9 poeng) Gi en felles sannhetstabell for proposisjonene

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

og

$$p \wedge (q \vee r).$$

- b) (4 poeng) Forklar hvorfor proposisjonene i a) er logisk ekvivalente.

Oppgave 6 (7 poeng)

Anta at p, q og r er proposisjonsvariabler. Bruk logiske ekvivalenser til å avgjøre om

$$((q \vee \neg q) \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p)$$

er en tautologi, tilfredsstillbar eller utilfredsstillbar.

Funksjoner

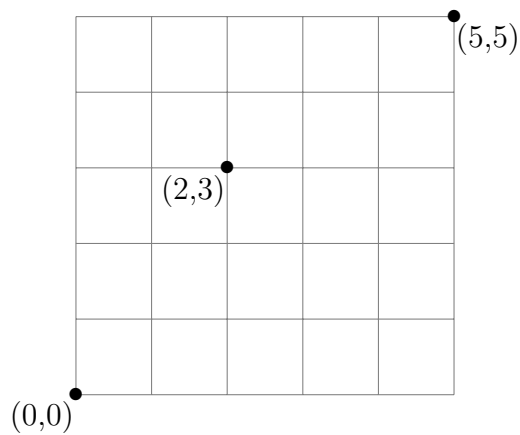
Oppgave 7 (9 poeng)

Er funksjonen $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ gitt ved $f(n) := 2n + 4$ surjektiv? Injektiv?

Kombinatorikk

Oppgave 8 (10 poeng)

Betrakt følgende 5×5 -rutenett. I denne oppgaven skal en telle antall veier mellom $(0,0)$ og $(5,5)$ som kun går vertikalt oppover eller horisontalt til høyre, og det er kun ved heltalls koordinater at de kan skifte retning fra horisontalt til vertikalt og omvendt.



Hvor mange slike veier finnes det?

Endelige tilstandsautomater og språk

I denne delen antar vi at alle språk, tilstandsautomater og uttrykk har alfabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Oppgave 9

- a) **(5 poeng)** Gi et regulært uttrykk som svarer til språket bestående av alle strenger som inneholder strengen ab .
- b) **(8 poeng)** Gi en deterministisk endelig tilstandsautomat med nøyaktig fire tilstander som aksepterer språket bestående av alle strenger som begynner med en a og inneholder et oddetall antall a 'er.

Induksjon

Oppgave 10 (10 poeng)

Bruk induksjon til å vise at

$$1 \cdot (1 + 1) + 2 \cdot (2 + 1) + \cdots + n \cdot (n + 1) = \sum_{i=1}^n i(i + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$$

holder for alle heltall $n \geq 1$.

Hint: Det kan være nyttig å se etter en mulighet for å faktorisere og å legge merke til at $\frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(n + 3)$.