

MA0301
Elementær Diskret Matematikk

Oppgaver

Alle oppgavene skal besvares skriftlig, med begrunnelse og/eller utregning. Settet består av 10 oppgaver, som teller 10 poeng hver.

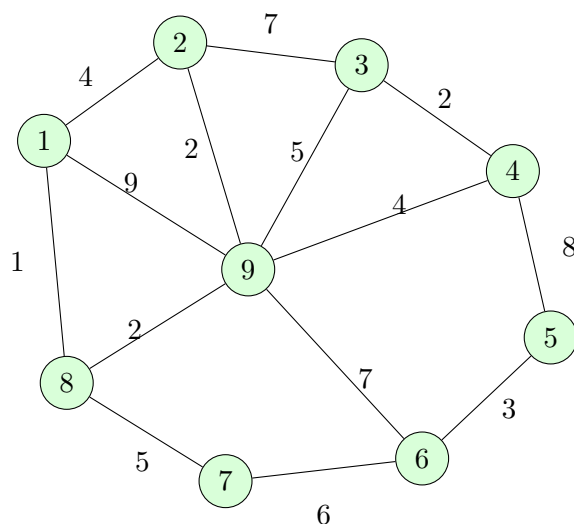
1 La $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ og la $B = \{a, b, c, d\}$.

- a) Hvor mange elementer har $A \times B$?
- b) Hvor mange elementer har potensmengden $\mathcal{P}(B)$? (Husk at potensmengden til B er mengden av alle delmengder av B .)
- c) Hvor mange funksjoner finnes fra A til B ?
- d) Hvor mange injektive funksjoner finnes fra B til A ?

2

- a) Hvor mange anagrammer kan du lage av strengen "anagrammer"?
- b) Du skal lage passord av lengde 4. Du kan bruke de 26 bokstavene i det engelske alfabetet $\{a, b, c, \dots, z\}$, de 10 sifrene $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ og de 4 spesialsymbolene $\{\#, \$, \%, !\}$. De fire tegnene i passordet skal være forskjellige, og det første og det siste skal være en bokstav. Hvor mange muligheter finnes?

3 Finn et minimalt utspenningstre for denne vektete grafen ved hjelp av Prims algoritme eller Kruskals algoritme. Forklar framgangsmåten.



- 4 La p, q, r være utsagnsvariabler og betrakt de fire formlene:

$$P : (p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)$$

$$Q : (p \vee \neg r) \rightarrow q$$

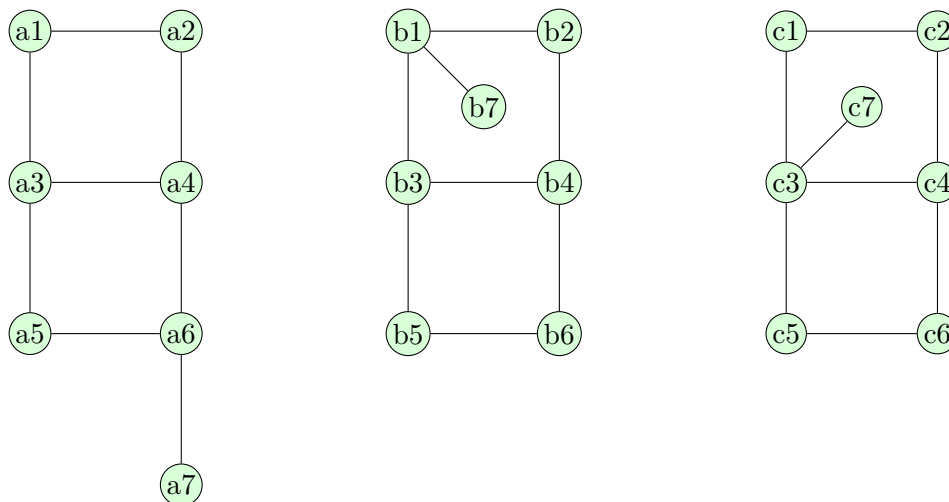
$$R : \neg p \vee q \vee r$$

$$S : p \vee r$$

For hvert par av formler, finn ut om de er logisk ekvivalente, om den ene er en konsekvens av den andre, eller om de er logisk uavhengige.

Hint: sannhetsverditabell

- 5 a) Avgjør hvilke av grafene under som er isomorfe. Hvis du mener to grafer er isomorfe, finn en eksplisitt grafisomorfi. Hvis du mener to grafer ikke er isomorfe, begrunn hvorfor.
- b) Har noen av grafene en Eulervei og/eller en Eulerkrets?



- 6 Hvilken/hvilke av de følgende utsagnene er alltid sanne, når universet er mengden av alle hele tall $\mathbb{Z}$? Forklar.

- $\forall x \forall y \exists z (xy = z)$
- $\exists x \forall y \forall z (xy = z)$
- $\forall x \exists y \exists z (x = y^2 + z^2)$
- $\forall x \exists y (xy = 1)$
- $\forall x \exists y (x + y = 1)$

- 7 La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og betrakt relasjonen

$$R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 1, 5 \rangle\}.$$

Forklar hvorfor dette er en partiell ordning. Tegn Hasse-diagrammet.

- 8 Bevis ved hjelp av matematisk induksjon at summen av de n første positive partall (altså partall større enn 0) er $n^2 + n$, altså at

$$\sum_{i=1}^n 2i = n^2 + n.$$

- 9
- a) Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner ikke-tomme strenger over alfabetet $\{0, 1\}$, slik at summen av tallverdiene til symbolene i strengen er et partall.
 - b) Lag en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner ikke-tomme strenger over alfabetet $\{0, 1, 2\}$, slik at summen av tallverdiene til symbolene i strengen er et partall større enn 3.

- 10
- a) Husk at en bijeksjon er en funksjon som er surjektiv og injektiv. La X, Y være mengder. La $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow X$ være funksjoner som oppfyller $gf(x) = x$ for alle $x \in X$, og $fg(y) = y$ for alle $y \in Y$. Vis at f da er en bijeksjon.
La A være en ikke-tom mengde, og la $k : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ være gitt ved $k(X) = A \setminus X$.
 - b) Forklar hvorfor k er en bijeksjon. Hint: bruk a).
 - c) La $a \in A$. La $h : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ være gitt ved $h(X) = X \cup \{a\}$. Er h surjektiv? Er h injektiv?