

*Merk:*  $C^k$  er mengda av alle funksjonar som er kontinuerlege, og har kontinuerlege partiell-deriverte opp til og med orden  $k \in \mathbb{N}$ .

**Oppgåve 1** La  $a, b, c \in \mathbb{R}$  og

$$\mathbf{F}(x, y) = (ax + by, bx + cy).$$

Finn ein skalarfunksjon  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  slik at  $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ .

**Oppgåve 2** I kva retning veks  $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$  raskast i punktet  $(2, -3)$ ?

**Oppgåve 3** Argumenter for at funksjonen  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  er kontinuerleg, og at han har minst ein global maksimumsverdi.

**Oppgåve 4** La  $\mathcal{C}$  vere ei romkurve med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(1 + t^2), \sin(1 + t^2), -t^2), \quad t \in [1, \sqrt{\pi + 1}].$$

Finn bogelengdparametriseringa til  $\mathcal{C}$ .

**Oppgåve 5** La  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vere  $C^2$ , og gå ut i frå at  $f$  tilfredsstiller

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0.$$

La  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  og  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ , og vis at  $\partial_{\mathbf{u}}(\partial_{\mathbf{v}}f(x, y)) = 0$ .

**Oppgåve 6** La

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x^2}(y+1), & x < 0, \\ x(y+1), & x \geq 0. \end{cases}$$

Finn  $\frac{\partial}{\partial x}f(0, 0)$  og  $\frac{\partial}{\partial y}f(0, 0)$ .

**Oppgåve 7** La  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vere gjeve ved

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - xy - 2y.$$

Finn og klassifiser dei kritiske punkta til  $f$ .

Har  $f$  globale ekstremalverdiar?

**Oppgave 8** Vis at transformasjonen  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{T}(u, v, w) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}w + 2, v - 3, \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}w \right),$$

ikkje forandrar volumet til kva som helst avgrensa og lukka mengde  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , altså at volumet til  $\mathbf{T}(D)$  er lik volumet til  $D$ .

*Hint:* Variabelbytte for trippelintegral.

**Oppgave 9** La  $\mathcal{C}$  vere den lukka randa til mengda

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

med positiv orientering, og la

$$\mathbf{F}(x, y) = (-e^x \cos(y), e^x \sin(y) + 2xy).$$

Finn

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

**Oppgave 10** La  $g : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  være  $C^1$ . Ei overflate er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), g(\rho)), \quad (\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Vis at arealet til overflata er gjeve ved

$$A = 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + (g'(\rho))^2} d\rho.$$

*Hint:*  $dS = \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{r}(\rho, \theta) \times \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r}(\rho, \theta) \right| d\rho d\theta$