

Oppgave 1 (5 · 2p)

- (i) Skissér nivåkurven
- $f(x, y) = 9$
- til

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

- (ii) Bestem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \cos(3x)}{x^2 + y^2}.$$

- (iii) I hvilken retning vokser

$$f(x, y, z) = x^2 + e^y + 5z$$

raskest ut fra punktet $(x, y, z) = (1, 0, 3)$?

- (iv) Avgjør om variabelskiftet

$$(x, y) \mapsto (u, v) = \frac{1}{2}(x + y, x - y)$$

er inverterbart på $\mathbb{R}^2$.

- (v) Hva er arbeidet
- $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
- for potensialfeltet

$$\mathbf{F} = \nabla(x^2 y^2)$$

langs sirkelen γ gitt ved $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$?**Oppgave 2** (10p) Finn eventuelle største og minste verdier til

$$f(x, y) = (x - 1)^2 y$$

på den elliptiske disken $\{(x, y) : x^2 + 5y^2 \leq 5\}$.**Oppgave 3** (10p) Finn en enhetsnormal til

$$z = x^2 + y^2, \quad 1 < z < 2, \quad x, y > 0,$$

i et generelt punkt (x, y, z) på flaten. Beregn så arealet til samme flate.

Oppgave 4 (10p) Finn lineariseringen L til

$$f(x, y) = 2x + 3y \cos(x - y) + (x - y)^2 e^{y^2}.$$

ut fra punktet $(x_0, y_0) = (1, 1)$ i retning $\mathbf{h} = (0.1 \cos(t), 0.1 \sin(t))$.

Approximér så $\int_{\gamma} f \, ds$ gjennom å beregne

$$\int_{\gamma} L \, ds$$

langs $\gamma(t) = (1 + 0.1 \cos(t), 1 + 0.1 \sin(t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Hint: De tre følgende oppgavene dreier seg om vektoranalyse, og her kan det være lurt å huske på de tre store teoremene til Stokes, Gauss og Green. Samtidig kan det også finnes flere måter å løse en oppgave på.

Oppgave 5 (10p) La γ beskrive en enkel, lukket kurve, og la $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være harmonisk, det vil si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Gitt at harmoniske funksjoner har kontinuerlige deriverte av alle ordner, vis at

$$\oint_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} dy = \oint_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial y} dx.$$

Oppgave 6 (10p) La

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_j| \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2, 3\}$$

være enhetskuben med sentrum i origo. Beregn fluksen

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

ut av K for vektorfeltet

$$\mathbf{F}: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 x_3, x_2^2 + x_1 x_3, x_3^3 + x_1 x_2).$$

Oppgave 7 (10p) La S være den sammenhengende delen av flaten

$$x^2 + y^6 \sin^2(y) + 9z^2 \cos^2(y) = 9, \quad y \geq 0,$$

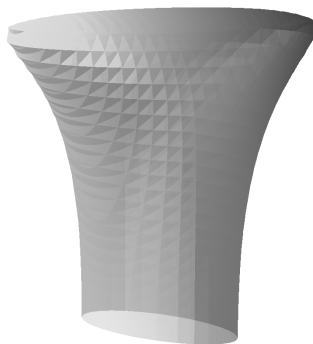
som skjærer $y = 0$. Gjennom flaten flyter krystaller i bevegelse med hastighetsfeltet

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (z + zy, xyz, 2x).$$

Bestem den totale rotasjonen

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

til krystallfluiden på flaten S , der $\mathbf{N}$ er enhetsnormalen som peker ut av flaten.



Figur 1: Flaten S orientert med y -aksen oppover, og rand nederst ved $y = 0$.

Formler og konvensjoner

$$\begin{array}{llll}
x & = & r \cos(\theta) & = & \varrho \cos(\theta) \sin(\varphi), & 0 \leq r, \varrho \\
y & = & r \sin(\theta) & = & \varrho \sin(\theta) \sin(\varphi), & 0 \leq \theta < 2\pi \\
z & = & z & = & \varrho \cos(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi.
\end{array}$$

$$ds = |\gamma'(t)| dt$$

$$dA = dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

$$d\sigma = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| \, ds \, dt$$

$$(d\sigma = |(z_x, z_y, -1)| \, dx \, dy \quad \text{for} \quad z = z(x, y))$$

$$dV = dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz = \varrho^2 \sin(\varphi) \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta$$

$$d\mathbf{r} = \gamma'(s) \, ds = \mathbf{T} \, ds = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} |\gamma'(t)| \, dt$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dV$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$