

Merk: C^k er mengda av alle funksjonar som er kontinuerlege, og har kontinuerlege partiell-deriverte opp til og med orden $k \in \mathbb{N}$.

Oppgåve 1 Banene til to partiklar er gjeve ved

$$\mathbf{r}(t) = (t + 5, t^2 + 4t + 6) \quad \text{og} \quad \tilde{\mathbf{r}}(t) = (2t + 1, 2t + 6), \quad \text{der tida } t \in \mathbb{R}.$$

Vis at partiklane sine baner skjærer kvarandre i $(1, 6)$ og $(6, 11)$.

Kolliderer partiklane i dei nemnde punkta?

Oppgåve 2 La $c > 0$, og la $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vere C^2 . Vis at

$$h(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

tilfredsstiller

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x, t).$$

Oppgåve 3 Skildr og skisser kurva

$$(x + 1)^2 + y^2 = 9.$$

Finn ei parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av kurva som har positiv orientering.

Oppgåve 4 La

$$f(x, y) = x \cos(y) + y - x^2.$$

Finn alle retningane $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ med $|\mathbf{u}| = 1$ slik at $\partial_{\mathbf{u}} f(0, 0) = 0$.

Oppgåve 5 La

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Vis at $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ikkje eksisterer.

Oppgåve 6 Funksjonen $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gjeve ved

$$f(x, y) = e^{-4xy},$$

og har definisjonsområde

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

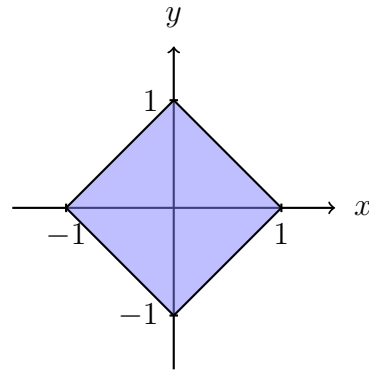
Finn ekstremalverdiane til f .

Hint: Du kan få bruk for at $\sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t)$.

Oppgave 7 Rekn ut

$$\iint_A \left(\frac{x-y}{x+y+2} \right)^2 dx dy,$$

der A er gjeve som det markerte området i figuren ved sidan av.

**Oppgave 8** La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vere C^1 . Definer så flatene

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0\}$$

og

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0\}.$$

Forklar kvifor

$$\iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{N}} dS,$$

der einingsnormalane $\mathbf{N}$, $\tilde{\mathbf{N}}$ peiker ut av flatene.

Hint: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$

Oppgave 9 La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vere gjeve ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2).$$

Rekn ut linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der kurva $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t) - 1), \quad t \in [0, \pi].$$

Oppgave 10 La $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ og $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alle vere C^1 , og gå ut i frå at $f(x) < g(x)$ for alle $x \in [a, b]$.

Vis at

$$\oint_{\partial R} P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx dy,$$

der det lukka og avgrensa området R er gjeve ved

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

og der ∂R har positiv orientering.

Kommentar: Direkte utrekning av integrala gjev maksimalt 10 poeng. Bruker ein Greens teorem på ein eller annan måte får ein maksimalt 3 poeng.