

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flervariabel analyse og vektoranalyse**

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf: 911 29 136

Eksamensdato: 16. mai 2026

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1 Regn ut trippelintegralet

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \exp\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right) dV.$$

Oppgave 2 Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne maksimum og minimum til funksjonen $f(x) := x - y + z$ på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Forklar hvorfor du med sikkerhet kan si at metoden leder til løsning av problemet.

Oppgave 3 La $\mathbf{r}(s)$, $s \in [0, \ell]$, være buelengde-parametriseringen til en kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^3$. Hva er lengden til $\mathcal{C}$? Anta at komponentene i $\mathbf{r}(s)$ er to ganger kontinuerlig deriverbare for alle s i $(0, \ell)$. Vis at $\mathbf{r}'(s)$ og $\mathbf{r}''(s)$ står ortogonalt på hverandre for alle s i $(0, \ell)$. (Hint: Hva er lengden til $\mathbf{r}'(s)$?)

Oppgave 4 La $\mathcal{C}$ være randen til halvsirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ med positiv orientering, og la

$$\mathbf{F}(x, y) := (\cos x - y^3, e^{-y^2} + x^3).$$

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Oppgave 5 La $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x, y, z) := e^x(\sin(\pi yz) + z).$$

a) Finn en normalvektor til tangentplanet til flaten

$$f(x, y, z) = 1 \tag{1}$$

i punktet $(0, 1, 1)$. (Du kan her gå ut fra at (1) definerer en flate i nærheten av punktet $(0, 1, 1)$.)

b) Bestem lineariseringen (den lineære approksimasjon) til f om punktet $(0, 1, 1)$.

c) Forklar hvorfor ligningen $f(x, y, z) = 1$ definerer en funksjon $z = \Phi(x, y)$ når (x, y) er i nærheten av $(0, 1)$, slik at $\Phi(0, 1) = 1$. (Hint: Husk implisitt funksjonsteorem.)

Oppgave 6 La $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være definert slik:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{4x^3 + y^3}{x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Avgjør om f er kontinuert i $(0, 0)$.

b) Beregn $\nabla f(0, 0)$ og avgjør i hvilken retning bort fra $(0, 0)$ f vokser raskest.

Oppgave 7 La $\mathbf{F}$ være et glatt vektorfelt i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et punkt slik at $\text{curl } \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) \neq \mathbf{0}$. La P være planet gjennom $\mathbf{r}_0$ med normalvektor $\text{curl } \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$. La $\mathcal{C}_\varepsilon$ være sirkelen i P med sentrum i $\mathbf{r}_0$ og radius ε . Bruk Stokes' teorem til å vise at

$$|\text{curl } \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathcal{C}_\varepsilon$ er positivt orientert relativt orienteringen til P gitt ved $\text{curl } \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$.

Formler og konvensjoner

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \sin \varphi \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\z &= \rho \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\end{aligned}$$

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

$$dA = dx dy = r dr d\theta$$

$$dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy \quad (z = z(x, y))$$

$$dV = dx dy dz = r dr d\theta dz$$

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial D} P dx + Q dy$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dV$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_S \text{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS$$