TDT4120 Algoritmer og datastrukturer

Eksamen, 7. august 2019, 09:00–13:00

Faglig kontakt Magnus Lie Hetland
Hjelpemiddelkode D

Oppgaver

6 % **1** Din venn Klokland mener hun har funnet en topp-hemmelig algoritme, der deler av pseudokoden er sensurert (se nedenfor). Du gjenkjenner den straks som en pensumalgoritme. Hvilken?

[redacted](A, p, r)
$x = A[r]$
$i = p - 1$
for $j = p$ **to** $r - 1$
    if $A[j] \leq x$
        $i = i + 1$
        [redacted] $A[i]$ [redacted] $A[j]$
[redacted] $A[i + 1]$ [redacted] $A[r]$
[redacted] $i + 1$

6 % **2** Klokland har også funnet en sensurert beskrivelse av *deler* av en annen algoritme, som du gjenkjenner som MST-Prim (se nedenfor). Hvordan skal linje 7 egentlig se ut, uten sensurering? (Her holder det med en kort forklaring av hva linjen skal gjøre, om du ikke husker eksakt notasjon fra pensum.)

6 **while** $Q \neq \emptyset$
7     $u =$ [redacted]
8   **for** each $v \in G.Adj[u]$
9   **if** $v \in Q$ and $w(u, v) < v.key$
10             $v.\pi = u$
11             $v.key = w(u, v)$

6 % **3** Klokland roter frem en sensurert beskrivelse av deler av *enda* en algoritme, som du gjenkjenner som Floyd-Warshall (se nedenfor). Hvordan skal linje 7 egentlig se ut, uten sensurering? (Her holder det med en kort forklaring av hva linjen skal gjøre, om du ikke husker eksakt notasjon fra pensum.)

5   **for** $i = 1$ **to** n
6   **for** $j = 1$ **to** n
7             $d_{ij}^{(k)} =$ [redacted]

6 % **4** Klokland har et siste sensurert algoritmefragment, denne gangen slutten av tellesortering (COUNTING-SORT, se nedenfor). Hva betyr det at tellesortering er *stabil*? Hva er det man må passe på i linje 10 for at algoritmen skal bli stabil? Forklar kort hvorfor.

```
10  for [redacted]
11      B[C[A[j]]] = A[j]
12      C[A[j]] = C[A[j]] − 1
```

6 % **5** Gi en svært kort beskrivelse av hvordan binærsøk (BISECT) fungerer. Hva er kjøretiden? (Du trenger ikke bruke kode eller pseudokode. Det holder med en kort tekstlig forklaring.)

5 % **6** La W, nedenfor, være vektmatrisen til en urettet graf G.

W

	1	2	3	4	5
1	0	4	5	∞	1
2	4	0	∞	2	4
3	5	∞	0	7	8
4	∞	2	7	0	3
5	1	4	8	3	0

Utfør Kruskals algoritme (MST-KRUSKAL) på grafen G. List opp kantene i den rekkefølgen de legges til i løsningen. (Dersom $i < j$, oppgi kanten mellom i og j som (i, j). Skriv én kant per linje i svaret.)

6 % **7** La oss si du skulle løse rekurrensen $T(n) = 3T(n/4) + n$ med iterasjonsmetoden (*repeated substitution*), der du ekspanderer det rekursive leddet gjentatte ganger, og hver ekspandering foregår på en ny linje. Hvor mange linjer hadde du trengt? (Oppgi svaret i Θ-notasjon. Merk: Du skal *ikke* løse rekurrensen.)

6 % **8** Du sorterer n tall ved å sette dem inn (i tilfeldig rekkefølge) i et binært søketre, for så å kjøre INORDER-TREE-WALK. Hva blir den forventede totale kjøretiden for innsetting med påfølgende traversering? Forklar kort hvordan du kommer frem til svaret.

6 % **9** Du skal velge ut videokanaler til forsiden på et videonettsted. Du har et sett med kanaler som hver har en estimert målgruppe, oppgitt som et aldersintervall (f.eks. *fra 10 til 25 år*). Du skal velge ut flest mulig kanaler, men får ikke velge noen som har overlappende målgrupper. Hvordan vil du gå frem? Forklar kort.

6 % **10** Dine venner Lurvik og Smartnes diskuterer forholdet mellom abstrakte beslutningsproblemer, konkrete beslutningsproblemer og formelle språk. Begge er enige om at beslutningsproblemer kan representeres som formelle språk, men mens Lurvik mener at vi da omtaler dem som abstrakte, så mener Smartnes at det er dette vi omtaler som konkrete problemer. Hvem har rett?

6 % **11** Hvis kanten (u, v) i et flytnettverk har flyt 4 og kapasitet 11, hvilke kanter vil finnes mellom u og v i restnettet, og hvilke kapasiteter vil de ha?

6 % **12** Din venn Klokland har laget følgende hashfunksjon $h : \mathrm{U} \to \{0, \ldots, m-1\}$ til bruk i hashtabellen $\mathrm{T}[0\,..\,m-1]$, der universet U er alle positive heltall:

$$h(k) = \min\big(\lfloor m(k\mathrm{A} \bmod 1)\rfloor + 2^k, m\big) - 1$$

Her er $\mathrm{A} \approx \big(\sqrt{5} - 1\big)/2$. Er h en god hashfunksjon? Diskutér kort.

7 % **13** Din venn Gløgsund grubler over korteste-vei-problemet og negative sykler, og hun har klart å forvirre seg selv grundig. Er problemet NP-hardt eller er det bare meningsløst? Og hvilken rolle spiller enkle stier (*simple paths*) oppi det hele? Gi en kort oppsummering.

7 % **14** Din venn Gløgsund mener hun har funnet en verifikasjonsalgoritme med polynomisk kjøretid for komplementet til HAM-CYCLE. Om hun har rett, hvilke konsekvenser har det for forholdet mellom klassene P, NP og co-NP? Forklar.

7 % **15** Du skal løse et problem i to faser. I første fase får du oppgitt en serie med m ligninger av typen $x_i = x_j$, der i og j er heltall i området $1, \ldots, n$. I andre fase får du oppgitt en serie ulikheter av typen $x_i \neq x_j$, og du skal da avgjøre om disse kan være sanne, gitt den første serien med ligninger. Anta at du vil behandle både ligningene og ulikhetene så effektivt som mulig, i verste tilfelle. Hvordan vil du gå frem? Hvordan ville du gå frem om du fikk bruke vilkårlig lang tid i første fase (dvs., behandle ligningene som et *statisk datasett*)?

7 % **16** Du har oppgitt to sekvenser $\mathrm{X} = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ og $\mathrm{Y} = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ og ønsker å lage to sekvenser $\mathrm{A} = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ og $\mathrm{B} = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ som er så lange som mulig (dvs., k er så stor som mulig), og der følgende holder:

1. $a_i \in \{1, \ldots, m\}$ og $b_i \in \{1, \ldots, n\}$ (for $i = 1, \ldots, k$)
2. $a_i < a_{i+1}$ og $b_i < b_{i+1}$ (for $i = 1, \ldots, k-1$)
3. $x_{a_i} < y_{b_i}$ (for $i = 1, \ldots, k$)

Beskriv en algoritme som løser problemet. Hva blir kjøretiden?

(En stor del av oppgaven her er å forstå oppgaveteksten.)