NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 7. august 2015

1 Delvis integrasjon med $u'(x) = x^2$ og $v(x) = \ln x$ gir

$$\int_1^e x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{1}{9}(2e^3+1).$$

2 Differensialligningen er separabel. Vi løser ved separasjon av variabler. Det gir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{e^x} &= \sin t \,\mathrm{d}t \\ \int e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int \sin t \,\mathrm{d}t \\ -e^{-x} &= -\cos t - C \\ e^{-x} &= \cos t + C \\ -x &= \ln(\cos t + C). \end{aligned}$$

Det vil si,

$$x(t) = \ln\left(\frac{1}{\cos t + C}\right).$$

Fra initialbetingelsen $x(0) = 1$ får vi at $C = e^{-1} - 1$. Altså er

$$x(t) = \ln\left(\frac{e}{e\cos t + 1 - e}\right).$$

3 Vi observerer at $\sqrt{x} \geq x^2$ for $x \in [0,1]$. Skivemetoden gir

$$V = \pi\int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi.$$

4 Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+x} = \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

der vi får at $A = C = 1$ og $B = 0$. Dermed er

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + \arctan x + C.$$

5 Funksjonen f er kontinuerlig på det lukkede intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Altså har f en maksimalverdi og en minimalverdi på $[-\pi/2, \pi/2]$ ved ekstremalverditeoremet. Vi må dermed sjekke endepunktene samt eventuelle kritiske og singulære punkter.

Ved å benytte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \frac{x}{|x|}$ for alle $x \neq 0$ får vi

$$f'(x) = \frac{x}{|x|}\cos|x| - \frac{1}{2}$$

slik at $f'(x) = 0$ har løsning $x = \pi/3$. Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|$ ikke eksisterer for $x = 0$, er $x = 0$ et singulært punkt.

Fra

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \frac{\pi}{4} \approx 2.7854 \qquad\qquad f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + 1 \approx 1.3424 \qquad\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{4} \approx 1.2146$$

ser vi at f oppnår sitt maksimum i $x = -\pi/2$ og sitt minimum i $x = 0$.

6 Fra oppgaveteksten får vi

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv(t)^2,$$

der $v(t)$ betegner hastigheten (målt i km/time), t er antall timer og k er proposjonalitetskonstanten. Videre har vi at $v(0) = 8$ og $v(1/12) = 6$.

Differensialligningen er separabel og vi løser ved separasjon av variabler. Det gir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} &= -k\,\mathrm{d}t \\ \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2} &= \int -k\,\mathrm{d}t \\ -\frac{1}{v} &= -kt - C \\ \frac{1}{v} &= kt + C. \end{aligned}$$

Det vil si,

$$v(t) = \frac{1}{kt + C}.$$

Fra $v(0) = 8$ får vi at $C = 1/8$. Altså er

$$v(t) = \frac{8}{8kt + 1}.$$

Fra $v(1/12) = 6$ får vi $k = 1/2$. Det vil si,

$$v(t) = \frac{8}{4t + 1}.$$

For å finne t slik at $v(t) = 1$ løser vi $8/(4t + 1) = 1$ med hensyn på t. Litt regning gir $t = 7/4$. Altså har boreplattformen hastighet 1 km/time etter 7/4 time, det vil si 1 time og 45 minutter.

7 **a)** Fra formelen for buelengden til grafen til en funksjon får vi

$$s = \int_2^7 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^7 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x.$$

Vi regner ut integralet $\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x$ ved hjelp av substitusjon. La $u = 9x + 22$. Da er

$$\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_{40}^{85} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{40}^{85} = \frac{2}{27}(85\sqrt{85} - 80\sqrt{10}).$$

Altså er

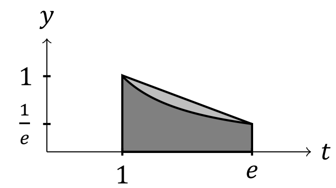
$$s = \frac{1}{2}\int_2^7 \sqrt{9x + 22}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{27}(85\sqrt{85} - 80\sqrt{10}) = \frac{5\sqrt{5}}{27}(17\sqrt{17} - 16\sqrt{2}).$$

b) Legg merke til at $f(g(x)) = (x^{2/3} - 2 + 2)^{3/2} = x$ og $g(f(x)) = ((x+2)^{3/2})^{2/3} - 2 = x + 2 - 2 = x$. Altså er f og g inverse funksjoner av hverandre. Dermed må grafene deres ha samme buelengde.

8 Trapesmetoden med $n = 1$ gir

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t} \approx (e-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}\right) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \approx 1.1752 > 1.$$

En måte å se at trapesmetoden gir en for stor verdi for integralet er å tegne grafen til $f(t) = 1/t$ og trapeset gitt av trapesmetoden med $n = 1$ i samme figur.



Det er klart at arealet av trapeset er større enn arealet under grafen til $f(t)$. Altså vil trapesmetoden med $n = 1$ gi en for stor verdi for integralet.

Fra

$$\frac{1}{2}(e - e^{-1}) > 1$$

får vi, ved å gange begge sider med $2e$, at

$$e^2 - 1 > 2e.$$

Det vil si, $e^2 - 2e - 1 > 0$.

Legg merke til at $e^2 - 2e - 1 = (e-1)^2 - 2$. Altså er

$$e^2 - 2e - 1 = (e-1)^2 - 2 > 0.$$

Det vil si, $(e-1)^2 > 2$. Ved å ta kvadratoten på begge sider av ulikhetstegnet, samt legge til 1 på begge sider, får vi

$$e > \sqrt{2} + 1 \approx 2.4142.$$

9 La $f(x) = xe^{-x^2}$. Da er

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k^2/n^2}$$

en Riemann-sum for f på intervallet $[0, 1]$. Det gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k^2/n^2} = \int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Vi regner ut integralet $\int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ved hjelp av substitusjon. La $u = -x^2$. Da er

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u\, u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

Altså er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k^2/n^2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$