TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 20. desember 2016

1 Ettersom

$$\frac{x+3}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)+1}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

følger det at

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\infty} \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx &= \int_{-1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}\right) dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x+2) - \frac{1}{x+2}\right]_{-1}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln(b+2) - \frac{1}{b+2} + 1\right).\end{aligned}$$

Siden

$$\lim_{b\to\infty} \ln(b+2) = \infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b+2} = 0$$

får vi at

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx = \infty.$$

Altså divergerer integralet.

2 **a)** La $f(x) = \arctan x - 2x + 4$ for $x \in \mathbb{R}$. Siden f er en kontinuerlig funksjon og $f(3) < 0 < f(0)$, gir skjæringssetningen at $f(x) = 0$ har minst én løsning når $x \in (0, 3)$. Observer at

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2.$$

Da $0 < 1/(1+x^2) \leq 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$, må $f'(x) < 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Altså er f en strengt avtagende funksjon. Dermed har $f(x) = 0$ nøyaktig én løsning for $x \in (0, 3)$. Siden f er strengt avtagende for alle $x \in \mathbb{R}$ kan ikke $f(x) = 0$ ha løsninger for x utenfor $(0, 3)$. Dermed har $f(x) = 0$ nøyaktig én løsning for $x \in \mathbb{R}$.

Newtons metode gir i vårt tilfelle at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\arctan x_n - 2x_n + 4}{1/(x_n^2+1) - 2}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$ Innsatt for $x_0 = 2$ får vi at

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{\arctan 2 - 4 + 4}{1/(2^2+1) - 2} = 2 + \frac{5 \arctan 2}{9} \approx 2.6151 \\ x_2 &\approx 2.6151 - \frac{\arctan 2.6151 - 5.2302 + 4}{1/(2.6151^2+1) - 2} \approx 2.6019. \end{aligned}$$

b) For at kurven $e^{y/4} \arctan x + 4 - ye^x = 2x \cos \pi y$ skal skjære x-aksen må $y = 0$. Innsatt for $y = 0$ får vi $\arctan x + 4 = 2x$. Det vil si, $\arctan x + 4 - 2x = 0$. Fra **a)** vet vi at $\arctan x + 4 - 2x = 0$ har nøyaktig én løsning for $x \in \mathbb{R}$. Altså skjærer kurven x-aksen nøyaktig én gang.

For å finne ligningen for tangenten til kurven i punktet $(0, 4)$ bruker vi implisitt derivasjon med hensyn på x. I vårt tilfelle får vi at

$$\frac{1}{4} e^{y/4} \arctan x \frac{dy}{dx} + \frac{e^{y/4}}{1+x^2} - e^x \left(\frac{dy}{dx} + y\right) = 2 \cos \pi y - 2\pi x \frac{dy}{dx} \sin \pi y.$$

Innsatt for $(x, y) = (0, 4)$ får vi at

$$e - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,4)} - 4 = 2,$$

slik at

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,4)} = e - 6.$$

Ligningen til tangenten til kurven i punktet $(0, 4)$ er så gitt ved

$$y - 4 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,4)} x = (e - 6)x,$$

det vil si,

$$y = (e - 6)x + 4.$$

$\boxed{3}$ Siden $|\cos(1/(x - 1))| \leq 1$ for alle $x \neq 1$, har vi at

$$-\sin^2(x-1) \leq \sin^2(x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq \sin^2(x-1)$$

for alle $x \neq 1$. Da

$$\lim_{x\to 1} \pm \sin^2(x-1) = 0$$

gir skviseregelen at

$$\lim_{x\to 1} \sin^2(x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0.$$

For at f skal være kontinuerlig i $x = 1$ så må $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ hvilket er oppfylt når $L = f(1) = 0$. Altså er f kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$ når $L = 0$.

$\boxed{4}$ Legg merke til at $f(\pi/3) = e^{5/2+1/2} = e^3$, slik at $f^{-1}(e^3) = \pi/3$. Siden

$$f'(x) = -e^{5/2+\cos x}\sin x$$

har vi at

$$(f^{-1})'(e^3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e^3))} = \frac{1}{f'(\pi/3)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-3}.$$

$\boxed{5}$ La $y_1 = 4 - x^2$ og $y_2 = 2 - x$. For å finne skjæringspunktene ser vi på $y_1 = y_2$, det vil si, $4 - x^2 = 2 - x$. Det svarer til $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0$ som har løsning $x = -1$ og $x = 2$. Videre så er $y_1 \geq y_2$ for alle $x \in [-1, 2]$. Skivemetoden gir så at volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{2} \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx = \pi \int_{-1}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4 - (4 - 4x + x^2)\right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^{2} \left(12 + 4x - 9x^2 + x^4\right) dx = \pi \left[12x + 2x^2 - 3x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2} = \frac{108}{5}\pi. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Innsatt for $x = \pi/2$ får vi at

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\pi/2} 2t\sin(\pi - t)\,dt = [2t\cos(\pi - t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\cos(\pi - t)\,dt \\ &= [2\sin(\pi - t)]_0^{\pi/2} = 2. \end{aligned}$$

Analysens fundamentalsetning gir at $f'(x) = 2x\sin(\pi - x)$ slik at

$$f''(x) = 2\sin(\pi - x) - 2x\cos(\pi - x).$$

Dermed er $f'(\pi/2) = \pi$ og $f''(\pi/2) = 2$.
Taylor-polynomet til f av grad 2 om punktet $a = \pi/2$ er så gitt ved

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\pi/2)}{k!} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 2 + \pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 - \frac{\pi^2}{4} + x^2. \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ (i) La $a_n = (-1)^{n+1}/(n + \ln n)$. Siden $n + 1 + \ln(n+1) > n + \ln n$ for alle $n \geq 1$ har vi at

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{n + 1 + \ln(n+1)} < \frac{1}{n + \ln n} = |a_n|$$

for alle $n \geq 1$, har vi at leddene er avtagende. Observer at $a_n a_{n+1} < 0$ for alle $n \geq 1$ og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Da vi i tillegg vet at leddene avtagende, gir test for alternerende rekker at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \ln n}$$

er konvergent.
For å avgjøre om rekken er absolutt konvergent eller betinget konvergent må vi se på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

og hvorvidt den konvergerer eller divergerer. Siden $n + \ln n < 2n$ for $n \geq 1$ har vi at

$$\frac{1}{n + \ln n} > \frac{1}{2n}$$

for alle $n \geq 1$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ er den harmoniske rekken som vi vet at divergerer (ved for eksempel integraltesten), gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

divergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)$ divergerer.
Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \ln n}$$

betinget konvergent.

(ii) Siden $n - 1 < n$ for alle $n \geq 2$ har vi at

$$\frac{n-1}{n^4} < \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

for alle $n \geq 2$, gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^4}$$

konvergerer da $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^3$ konvergerer (dette er en p-rekke, med $p = 3 > 1$ som vi vet at konvergerer ved for eksempel integraltesten).

La $a_n = (n-1)/n^4$. Siden $a_n > 0$ for alle $n \geq 2$ (det vil si, $|a_n| = a_n$ for alle $n \geq 2$) må

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^4}$$

være absolutt konvergent.

(iii) Siden $f(x) = \arctan x$ er en strengt voksende funksjon for alle $x \in \mathbb{R}$, og $f(0) = 0$, må $n^2 - \arctan n < n^2$ for alle $n \geq 0$. Det gir at

$$\frac{3n}{n^2 - \arctan n} > \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$$

for alle $n \geq 1$. Sammenligningstesten gir så at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2 - \arctan n}$$

divergerer da $\sum_{n=1}^{\infty} 3/n$ divergerer.

$\boxed{8}$ La $f(x) = \sin x^2$. Siden $f'(x) = 2x \cos x^2$ er buelengden til grafen til $y = f(x)$ fra $x = 0$ til $x = 1$ gitt ved

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 \cos^2 x^2}\, dx.$$

La $F(x) = \sqrt{1 + 4x^2 \cos^2 x^2}$. I vårt tilfelle har vi fire delintervaller samt at $a = 0$ og $b = 1$ slik at $h = (1-0)/4 = 0.25$.

Simpsons metode med fire delintervaller gir så tilnærmingen $S_4 \approx I$, der

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{h}{3}\left(F(0) + 4F(0.25) + 2F(0.5) + 4F(0.75) + F(1)\right) \\ &\approx \frac{0.25}{3}\left(1 + 4 \cdot 1.1176 + 2 \cdot 1.3924 + 4 \cdot 1.6156 + 1.4723\right) \approx 1.3492. \end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Vi observerer at

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + 2x} = \frac{1}{x(x^2 - 2x + 2)} = \frac{1}{x\left((x-1)^2 + 1\right)}.$$

Delbrøkoppspalting gir så at

$$\frac{1}{x\left((x-1)^2 + 1\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{(x-1) - 1}{(x-1)^2 + 1}\right).$$

Den gitte differensialligningen er en separabel og lineær første ordens differensialligning. Vi kan løse den ved for eksempel separasjon av variabler eller integrerende faktor.

Løsning ved separasjon av variabler gir at

$$\begin{aligned} \ln|y - 1| &= \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 2x} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{(x-1) - 1}{(x-1)^2 + 1}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 2) + \arctan(x-1)\right) + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{x}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}} + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + \frac{C}{2} \end{aligned}$$

(der vi har brukt at $|x| = x$ for $x > 0$) slik at

$$y(x) - 1 = \frac{K\sqrt{x}e^{1/2\,\arctan(x-1)}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}}, \qquad K = \pm e^{C/2}.$$

Det vil si,

$$y(x) = 1 + \frac{K\sqrt{x}e^{1/2\,\arctan(x-1)}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}}.$$

Fra $y(1) = 0$ får vi at $y(1) = 1 + K = 0$, det vil si, $K = -1$.

Altså er

$$y(x) = 1 - \frac{\sqrt{x}e^{1/2\,\arctan(x-1)}}{(x^2 - 2x + 2)^{1/4}}.$$