Oppgave 1 Ligningen

$$x^5 - 2x - \frac{3}{2}e^x = 0$$

har nøyaktig én løsning r på intervallet $[-1, 1]$.

Bruk Newtons metode med $x_0 = 0$ til å finne en tilnærming til r med to siffers nøyaktighet.

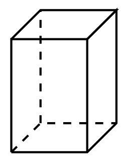
Oppgave 2 Regn ut

$$\int 2x^3 \sin(x^2 + 1)\, dx.$$

(Vink: Bruk først substitusjon og deretter delvis integrasjon.)

Oppgave 3

Et legeme, formet som et rektangulært prisme med kvadratisk grunnflate (du kan tenke på legemet som en «avlang» terning), blir presset sammen på en slik måte at høyden y minker med en rate 2 cm/min, men der volumet forblir konstant. Hva er endringsraten til sidelengden x i det $x = 30$ cm og $y = 20$ cm?



Oppgave 4 Vis at funksjonen

$$f(x) = \ln(\arcsin(x) + 2), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

har en invers (omvendt) funksjon, $f^{-1}(x)$. Finn et uttrykk for $f^{-1}(x)$.

Oppgave 5 Finn taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, om $a = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - x^2}, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

For hvilke x kan vi si helt sikkert at

$$|f(x) - P_2(x)| \leqslant 10^{-6}$$

når vi vet at $|f'''(x)| \leqslant 131$ for alle $x \in [-1/2, 1/2]$? Svaret må begrunnes.

Oppgave 6 Avgjør om integralet

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 7 Finn buelengden til kurven gitt som grafen til

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Oppgave 8 Løs initialverdiproblemet

$$y(x) = (x+1)(y'(x) - x), \qquad y(0) = 4,$$

der vi antar at $x > -1$.

Oppgave 9 Avgjør om følgende rekker er absolutt konvergente, betinget konvergente eller divergente.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)}{n^2+1} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^n}{n^3} \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)+1}$$

Oppgave 10 Er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & x > 0 \\ e^x & x \leqslant 0 \end{cases}$$

kontinuerlig? Svaret må begrunnes.

Vis at

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

ved å bruke definisjonen til en grenseverdi. Det vil si, vis at det for alle $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - 1 \right| < \epsilon$$

når $0 < |x - 0| = |x| < \delta$.