Dette er en kombinasjon av oppgavene som ble gitt til eksamen.

Oppgave 1 Hvilke(t) av følgende utsagn er **feil**? Velg ett eller flere alternativer.

☐ Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

er absolutt konvergent.

☐ En kontinuerlig funksjon $f(x)$ som er definert på et lukket intervall $[a, b]$, og som har egenskapen at

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$, må nødvendigvis være strengt voksende eller strengt avtagende.

☐ En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som består av reelle tall a_n, der $a_n \leqslant a_{n+1}$ for alle $n \geqslant 1$ og hvor $a_n \leqslant 17$ for alle $n \geqslant 1$, vil konvergere.

☐ Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon som er definert på det lukkede intetvallet $[a, b]$, der $f(x) \geqslant 0$ for alle $x \in [a, b]$. Da angir integralet

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

volumet av omdreiningslegemet som oppstår når vi dreier området i xy-planet avgrenset av grafen til $y = f(x)$, x-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$ om x-aksen.

Oppgave 2 Hvilke(t) av følgende utsagn er **riktig**? Velg ett eller flere alternativer.

☐ Gitt at $f(x) = \cos x$, der x er målt i grader, så er $f'(x) = -\sin x$.

☐ $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad -1 < x < 1$

☐ Gitt at

$$F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}\, dt,$$

så er

$$F'(x) = \sqrt{1+x^5}.$$

☐ Det uegentlige integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+x^4}}\, dx$$

er et uegentlig integral av type 1 og 2.

Oppgave 3 I denne oppgaven skal du koble riktig initialverdiproblem (kolonner) med riktig løsning (rader). Finn de som passer sammen.

	$y' + x^2y = x^2, y(0) = 0$	$y' - x^2y = -x^2, y(0) = 0$	$y' - x^2y = x^2, y(0) = 0$	$y' + x^2y = -x^2, y(0) = 0$
$y(x) = 1 - e^{-x^3/3}$	○	○	○	○
$y(x) = e^{-x^3/3} - 1$	○	○	○	○
$y(x) = 1 - e^{x^3/3}$	○	○	○	○
$y(x) = e^{x^3/3} - 1$	○	○	○	○

Oppgave 4 Vis at stigningstallet til tangentlinjen til kurven $y = y(x)$, gitt ved

$$x^2 + y^2 + 2xy^3 - 1 = x,$$

er lik $-1/2$ i punktet $(x, y) = (0, 1)$.

Oppgave 5 La $f(x)$ være en kontinuerlig funksjon definert på $\mathbb{R}$. Er funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_0^{x-1} f(t)\,dt & x \neq 1 \\ f(0) & x = 1 \end{cases}$$

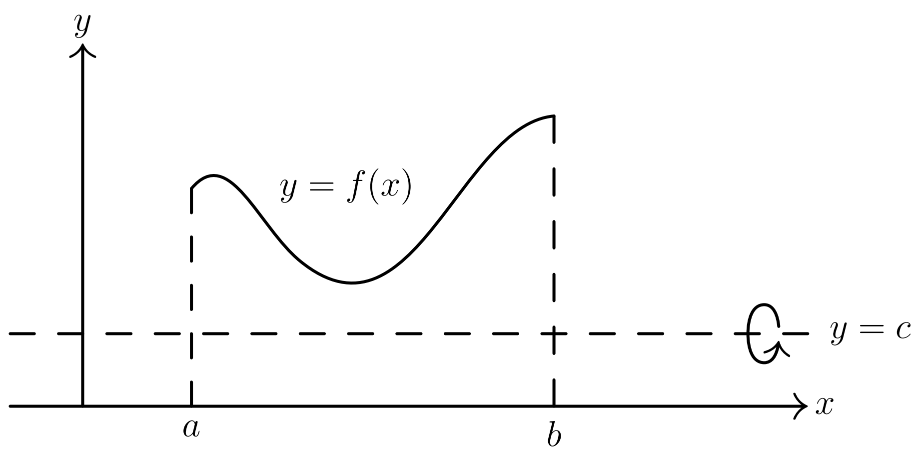
kontinuerlig? Svaret må begrunnes.

Oppgave 6 Vis at funksjonen

$$f(x) = 2 - xe^{x^8}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

har en invers, og regn ut $(f^{-1})'(2)$.

Oppgave 7 Angi integralet som svarer til arealet av omdreiningsflaten som oppstår når vi dreier grafen til $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ om linjen $y = c$ som vist i figuren under. Svaret må begrunnes.



Oppgave 8 Finn taylorrekken til

$$g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$$

om $x = 0$, der

$$f(x) = 4x + 8x^3 + 12x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1)x^{2n+1}, \qquad -1 < x < 1.$$

Oppgave 9 Merete har fått i oppgave på eksamen å avgjøre om grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

eksisterer eller ei, der hun har fått oppgitt at

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{og} \qquad g(x) = x.$$

Merete noterer følgende i sin besvarelse.

«Siden $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ gir L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to 0}\left(2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Og da vi vet at

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ikke eksisterer, kan vi slutte fra L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

heller ikke eksisterer.»

Kan du se hva Merete har gjort feil? Husk å begrunne hva du mener er feil i besvarelsen til Merete og skriv ned det du mener er en riktig redegjørelse for hvorvidt den aktuelle grensen eksisterer eller ei.

Oppgave 10 Statkraft har bygd en demning i Trøndelag. Demningen er utstyrt med en automatisk reguleringsmekanisme som hvert sekund slipper ut en hundretusendel av det vannet som befinner seg i den. Demningen har også et tilsig på 50 m^3 vann per sekund.

Skriv opp en differensialligning som tilfredsstilles av vannmengden $V(t)$ ved tiden t.

Demningen rommer totalt 5 000 000 m^3. Hvor lang tid tar det fra demningen er tom til den er halvfull?

Oppgave 11 Følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er definert ved å la

$$a_1 = 10$$

og

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}$$

for alle $n \geqslant 1$.

Vis at følgen konvergerer og finn grensen.

(Vink: Vis at følgen er avtagende dersom $a_n \geqslant 1$ for alle n.)