

Oppgave 1 La T vere området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrensa av planet $z = 1$ og kjegla $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Kva for eit av dei fire itererte integrala angir *ikkje* volumet av T ?

- (i) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dx dy$
- (ii) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$
- (iii) $4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx$
- (iv) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r dz dr d\theta$

Merk: Rekkefølgja for alternativa vil variere i Inspera og treng ikkje å vere lik med rekkefølgja presentert over.

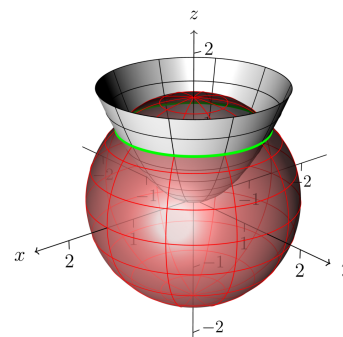
Oppgave 2 La $f(x, y) = x^2 + e^{xy}$. Bestem $\nabla f(x, y)$.

La $D_{\mathbf{u}}f(1, 0)$ angi den retningsderiverte til f i punktet $(1, 0)$ og retninga $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$). Finn retningane $\mathbf{u}$ slik at $D_{\mathbf{u}}f(1, 0) = 0$.

Oppgave 3

La $\mathcal{C}$ vere skjeringskurva mellom kuleflata $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

Finn ei parametrisering av $\mathcal{C}$ (hugs å angi intervallet for parameteren) og bestem bogelengda til $\mathcal{C}$.



Oppgave 4 Finn største og minste verdi av funksjonen

$$f(x, y) = 4x^2y$$

på sirkelen $x^2 + y^2 = 3$.

Oppgave 5 Vis at

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln \left(\frac{x^2 + xy^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Oppgave 6 Finn volumet av området i $\mathbb{R}^3$ gitt av ulikskapane

$$2 \leq z \leq 9, \quad x^2 + y^2 + 4 \leq z^2 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Oppgave 7 Gitt

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 5y \cos(x^5) dx dy.$$

Skissér integrasjonsområdet og rekn ut ved å bytte om på integrasjonsrekkefølga.

Oppgave 8 Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

er konservativt.

Rekn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der kurva C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Oppgave 9 La T vere området i $\mathbb{R}^3$ avgrensa av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ og planet $z = 0$.

La ∂T vere randa (overflata) til T . Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^3, x^2y, y^2z).$$

Rekn ut

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er einingsnormalen som peikar ut av T .

Oppgave 10

La C vere skjeringskurva mellom dei to paraboloidane gitt ved $z = 10 - (x - 1)^2 - y^2$ og $z = (x + 2)^2 + y^2 + 1$, og la C vere orientert mot klokka sett ovanfrå.

Du kan bruke utan bevis at projeksjonen av C i xy -planet er gitt ved

$$x^2 + x + y^2 = 2$$

som også kan skrivast som

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}.$$

Vis at C ligg i planet $z = 3x + 7$.

Rekn ut

$$\oint_C (2z - yz) dx + (\cos y + z) dy + (x^2 + z^2 + xy) dz.$$

