

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4120 Matematikk 4K

Faglig kontakt under eksamen: Eduard Ortega

Tlf: 46760087

Eksamensdato: 16 August 2024

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Oppgavene 1, 2, 3, 4, 5, 6 har lik vekting.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 5

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1

- a) Anta $f(t)$ og $g(t)$ er deriverbare funksjoner og anta at $f(0) = g(0) = 0$. Bruk laplacetransformasjon for å vise at

$$(f \star g)'(t) = (f' \star g)(t) = (f \star g')(t).$$

- b) Løs initialverdiproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t, \\ y(0) = 0 \text{ \& } y'(0) = 0. \end{cases}$$

Oppgave 2 Utvikle

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0, \\ 3 & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

i en fourierrekke (med periode 2π). Bruk resultatet til å summere rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Oppgave 3 Vis at det finnes ingen punkt i $\mathbb{C}$ hvor funksjonen $f(z) = (\bar{z} + 1)^3 - 3\bar{z}$ er analytisk. Hint: Bruk Cauchy-Riemann ligningen.

Oppgave 4 Finn løsningen av bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1 \text{ og } t \geq 0,$$

av formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{for alle } t \geq 0$$

og initialbetingelsene

$$u(x, 0) = x(1-x) \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{for alle } 0 < x < 1.$$

Oppgave 5 Finn laurenttrekkene til $f(z) = \frac{1}{z(1-z)(2-z)}$ med sentrum $z_0 = 0$ for de følgende områdene:

$$a) 0 < |z| < 1 \quad b) 1 < |z| < 2 \quad \text{og} \quad c) |z| > 2.$$

Oppgave 6 Beregn det uekte integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

Hint: Bruk funksjonen $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5}$

Diverse

- **Heavisidefunksjonen** $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, $u(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$
- **Diracs deltafunksjon** $\delta(t-a)$ er null bortsett fra i a og tilfredsstiller $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) dt = 1$, i tillegg er $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t-a) dt = g(a)$ for enhver kontinuerlig funksjon g .
- **Konvolusjon** For funksjoner som er definert på den reelle linjen:
 $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad -\infty < x < \infty;$
for funksjoner som kun er definert på den positive halvaksen:
 $f * g(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy, \quad x > 0.$

Laplacetransformasjon

- Definisjon: $\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

Generelle formler		$f(t)$	$F(s)$
		1	$\frac{1}{s}$
$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a)$		$t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f] - f(0)$		e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)$		$t^n e^{at}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$		$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$		$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\mathcal{L}[f(t-c)u(t-c)](s) = e^{-cs}F(s), c > 0$		$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -F'(s)$		$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$		$u(t-c), c > 0$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
		$\delta(t-c), c > 0$	e^{-cs}
		$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
		$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$

Fourierrekker og fouriertransformasjon

- $2L$ -periodiske funksjoner, reell og kompleks form

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

der

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$$

- Funksjoner definert på hele den reelle linjen (trenger ikke å være periodisk)

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}[f](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx,$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw.$$

- Parsevals identiteter

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw$$

Generelle formler		$f(x)$	$\hat{f}(w)$
$\widehat{f'(x)} = iw \hat{f}(w)$		$\delta(x - a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iaw}$
$\widehat{f''(x)} = -w^2 \hat{f}(w)$		$\begin{cases} 1, & -b \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin bw}{w}$
$\widehat{f(x-a)} = e^{-iaw} \hat{f}(w)$		$e^{-ax} u(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+iw)}$
$\hat{f}(w-b) = e^{ibw} \hat{f}(w)$		$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a w }}{a}$
$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$		e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$

Komplekse tall og analytiske funksjoner

- $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
- $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- Taylor- og laurenttrekkene til en analytisk funksjon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z - z_0)^{n-1} dz$$

Noen nyttige integral

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{2}{a^2} x \sin ax + \frac{2-a^2 x^2}{a^3} \cos ax + C$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2}{a^2} x \cos ax - \frac{2-a^2 x^2}{a^3} \sin ax + C$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

Noen trigonometriske identiteter

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

Noen viktige rekker

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ for $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ divergerer for $|x| \geq 1$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ for $x \in \mathbb{R}$.

Lineære andre ordens differensiallikninger

La r_1 og r_2 løse $r^2 + ar + b = 0$. Da har

$$y''(x) + ay'(x) + by = 0$$

generell løsning gitt ved:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{hvis} \quad r_1 \neq r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \quad \text{hvis} \quad r_1 = r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad \text{hvis} \quad r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$