Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4130/35 Matematikk 4N/4D**

Faglig kontakt under eksamen: Anne Kværnø[a], Kurusch Ebrahimi-Fard[b], Xu Wang[c]

Tlf: [a]92 66 38 24 , [b]96 91 19 85 , [c]94 43 03 43

Eksamensdato: 14. desember 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C: Bestemt, enkel kalkulator
Et stemplet gult A5-ark med egne håndskrevne notater og formler (begge sider)

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og skal inneholde nok detaljer slik at det kommer klart frem hvordan en har kommet frem til disse.
- Det er to ulike versjoner av Oppgave 3: én for Matematikk 4N og én for Matematikk 4D.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Laplacetransformasjon [20 poeng]

a) Bestem laplacetransformasjonen til funksjonen

$$f(t) = te^t.$$

b) Finn den inverse laplacetransformasjonen $\mathcal{L}^{-1}(F)(t)$ til følgende funksjon

$$F(s) := \frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}.$$

(Vink: du kan bruke delbrøksoppspaltning).

c) Bruk laplacetransformasjon til å finne løsningen til

$$y'(t) - y(t) = e^t + e^{-t}, \qquad \text{hvor } y(0) = \pi.$$

Oppgave 2 Fourierrekker og fouriertransformasjon [14 poeng]

a) La $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ være den komplekse fourierrekken til følgende funksjon

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Bestem c_n.

b) Bestem fouriertransformasjonen til

$$f(x) = xe^{-|x|}.$$

Oppgave 3 *TMA4130 Matematikk 4N:* Fouriertransformasjon [6 poeng]

Vis at for $a \neq 0$, så har vi

$$\mathcal{F}(f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f(t))(\frac{\omega}{a})$$

Oppgave 3 *TMA4135 Matematikk 4D:* Partiellderivert [6 poeng]

Vis at varmekjernen $h(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ tilfredsstiller $h_t = \frac{1}{2} h_{xx}$.

Oppgave 4 Partielle differensiallikninger [10 poeng]

Løs følgende varmelikning

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

med randbetingelser

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \forall \ t \geq 0;$$

og initialbetingelse

$$u(0,x) = \sin 3x + \sin 5x, \ \forall \ 0 \leq x \leq \pi.$$

Oppgave 5 Polynominterpolasjon [10 poeng]

Finn et polynom $p(x) \in \mathbb{P}_2$ som interpolerer punktene

x_i	-2	0	1	2
y_i	0	1	$9/8$	0

.

Oppgave 6 Numerisk integrasjon [10 poeng]

Integralet

$$\int_a^b f(x)dx,$$

kan approksimeres med kvadraturformelen

$$Q(a,b) = \frac{3h}{2}\Big(f(x_1) + f(x_2)\Big),$$

hvor

$$h = \frac{b-a}{3}, \quad x_1 = a + h \quad \text{og} \quad x_2 = a + 2h.$$

a) Bruk kvadraturregelen på integralet

$$\int_1^2 x \ln(x) dx.$$

b) Finn presisjonsgraden til kvadraturregelen. Intervallet $[a,b] = [-1,1]$ kan brukes.

Oppgave 7 Numeriske løsninger av ikke-linære likninger [10 poeng]

a) Følgende python-kode er gitt:

```
x = 2.5
for k in range(100):
    x_new = (3*x**4 + 24*x**2 -16)/(8*x**3)
    # Stop the iterations when ..
    x = x_new
```

Skriv ned fikspunktsiterasjonsskjemaet som er implementert her.

Foreslå et passende stopp-kriterium og skriv ned den tilsvarende python-koden.

b) Det er gitt at fikspunktet r er kjent og at alle beregninger er gjort med veldig stor nøyaktighet. I dette tilfellet er feilen $e_k = |r - x_k|$ for hver k, gitt ved

```
k =  1,  error = 9.50e-03
k =  2,  error = 1.06e-07
k =  3,  error = 1.49e-22
k =  4,  error = 4.14e-67
```

Bruk dette til å estimere konvergensraten til iterasjonsskjemaet.

Oppgave 8 Ordinære differensiallikninger [10 poeng]

Følgende Runge-Kutta metode er gitt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1), \\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_2.
\end{aligned}$$

a) Utfør én iterasjon med steglengde $h = 0.1$ ved å bruke metoden ovenfor på problemet:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + xy_2^2, & y_1(1) &= 1.0, \\
y_2' &= y_1 y_2, & y_2(1) &= -1.0.
\end{aligned}$$

b) Finn stabilitetsfunksjonen $R(z)$ for denne ~~funksjonen~~ metoden. Finn også det tilsvarende stabilitetsintervallet.

Oppgave 9 Endelig differanseskjema [10 poeng]

I denne oppgaven skal du sette opp et endelig differanseskjema for to-punkts randverdiproblemet

$$u'' + 2u = x^2, \qquad u'(0) + u(0) = 0, \qquad u(1) = 2,$$

definert på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

La N være antall gitterpunkter med $h = 1/N$, og la U_i være approksimeringer til den eksakte løsningen $u(x_i)$ i gitterpunktene $x_i = ih$ for $i = 0, 1, \ldots, N$. Sett opp det endelige differanseskjemaet for en generell N på formen

$$A\mathbf{U} = \mathbf{b},$$

hvor $\mathbf{U} = [U_0, U_1, \ldots, U_N]^T$, det vil si, sett opp matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$.

Fourier Transform

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} \,\mathrm{d}w$	$\hat{f}(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \,\mathrm{d}x$
e^{-ax^2}	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a}{w^2+a^2}$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{e^{-a\lvert w\rvert}}{a}$
$\begin{cases} 1 & \text{for } \lvert x\rvert < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\sin wa}{w}$

Laplace Transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \,\mathrm{d}t$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
t^n	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\Gamma(n+1) = n!$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

$$\int x^n \cos ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \,\mathrm{d}x$$
$$\int x^n \sin ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \,\mathrm{d}x$$