

i Eksamensoppgave i TMA4240/TMA4245 Statistikk**Dato:** 13. august, 2026**Tid:** 09:00-13:00**Faglig kontakt:** Jarle Tufto**Møter i eksamenslokalet:** Nei**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** Hjelpemiddelkode C.

- Tabeller og formler i statistikk (Akademika).
- Én bestemt enkel kalkulator I henhold til NTNUs generelle reglement.
- Matematisk formelsamling, Karl Rottmann.

Tabeller og formler i statistikk (Akademika).

Én bestemt enkel kalkulator I henhold til NTNUs generelle reglement.

Matematisk formelsamling, Karl Rottmann.

Automatisk rettede oppgaver: Oppgave **1-3** skal kun besvares direkte i Inspira (eventuelle håndtegninger vil ikke bli vurdert). Det er tilstrekkelig å oppgi alle svar med tre siffrers nøyaktighet. Bruk punktum som desimalskilletegn.

Papirhåndtegninger: I oppgave **4-6** er det lagt opp til å besvare på ark. Nederst i oppgaven finner du en sjusifret kode. Fyll inn denne koden øverst til venstre på arkene du ønsker å levere. Det anbefales å gjøre dette underveis i eksamen. Dersom du behøver tilgang til kodene etter at eksamenstiden har utløpt, må du klikke «Vis besvarelse».

Du er selv ansvarlig for å fylle inn riktige koder på eventuelle håndtegningsark. Les derfor informasjonen på omslagsarket nøye. Eksamenskontoret kan ikke garantere at feilaktig utfylte ark blir lagt til besvarelsen din.

Les oppgavene nøye og gjør dine egne antagelser. Presiser i besvarelsen for oppgave **4-6** hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven.

Dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet og du ikke kan gjøre dine egne antagelser, vises det til informasjon om klage på formelle feil på NTNU sin nettside om «Begrunnelse og klage».

Merk at det kun er tillatt med blå eller svart kulepenn (ikke rød kulepenn).

Vekting av oppgavene: Maksimalt antall poeng av totalt 100 er angitt for hver oppgave.

Trekk fra/avbrutt eksamen: Dersom du ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Etter eksamen finner du besvarelsen din under tidligere prøver i Inspira. Merk at det kan ta én virkedag før eventuelle håndtegninger vil være tilgjengelige under «tidligere prøver».

1 Oppgave 1 (skal besvares kun direkte i Inspira)

Norges tropp i årets fotball VM besto av følgende 26 spillere:

- **Keeper (3):** Ørjan Nyland, Sander Tangvik, Egil Selvik.
- **Forsvar (9):** Kristoffer Ajer, Leo Østigård, David Møller Wolfe, Fredrik Bjørkan, Marcus Holmgren Pedersen, Torbjørn Heggem, Sondre Langås, Henrik Falchener, Julian Ryerson.
- **Midtbane (11):** Morten Thorsby, Patrick Berg, Sander Berge, Martin Ødegaard, Fredrik Aursnes, Kristian Thorstvedt, Thelonious Aasgaard, Antonio Nusa, Andreas Schjelderup, Oscar Bobb, Jens Petter Hauge.
- **Angrep (3):** Alexander Sørloth, Erling Braut Haaland, Jørgen Strand Larsen.

Keeper (3): Ørjan Nyland, Sander Tangvik, Egil Selvik.

Forsvar (9): Kristoffer Ajer, Leo Østigård, David Møller Wolfe, Fredrik Bjørkan, Marcus Holmgren Pedersen, Torbjørn Heggem, Sondre Langås, Henrik Falchener, Julian Ryerson.

Midtbane (11): Morten Thorsby, Patrick Berg, Sander Berge, Martin Ødegaard, Fredrik Aursnes, Kristian Thorstvedt, Thelonious Aasgaard, Antonio Nusa, Andreas Schjelderup, Oscar Bobb, Jens Petter Hauge.

Angrep (3): Alexander Sørloth, Erling Braut Haaland, Jørgen Strand Larsen.

De fire kategoriene over angir de normale posisjonene til hver enkelt spiller.

a) På hvor mange måter kunne trener Ståle Solbakken velge ut 4 forsvarsspillere fra de totalt 9 forsvarsspillere i troppen?

b) På hvor mange måter kunne et 4-4-2 lagoppsett (1 keeper, 4 forsvarsspillere, 4 midtbane og 2 i angrep) settes sammen på fra de 26 spillerne i troppen gitt at alle spiller i sin normale posisjon?

c) Vi skal i dette punktet anta at den ene spillerbussen til det norske laget ble sittende fast i trafikkork før åttendedelsfinalen mot Brasil. I den andre spillerbussen som ankommer stadion befinner 11 spillere seg tilfeldig valgt fra troppen på 26. Hva er sannsynligheten for at disse 11 spillerene kan spille i et 4-4-2 lagoppsett gitt at alle 11 spiller i sine normale posisjoner?

Maks poeng: 12

2 Oppgave 2 (skal besvares kun direkte i Inspira)

Anta at 200 norske fotballtilhengere sitter på tribunen i en VM kamp. Hver tilhenger bestemmer seg være med å ro uavhengig av hverandre og med sannsynlighet 0.99.

a) Hva er sannsynligheten for at minst en tilhenger på tribunen ikke ror?

b) Hva er forventet antall tilhengere som ikke ror?

c) Beregn tilnærmet sannsynlighet for hendelsen i punkt a) ved hjelp av Poissontilnærming.

.

Maks poeng: 12

3 Oppgave 3 (skal besvares kun direkte i Inspira)

Dagen etter at Norge vant over Elfenbenskysten i 1/16-finalen i årets VM (1. juli) var de oppdaterte sannsynlighetene i Norsk regnesentrals modell for ulike hendelser i resten av VM som i følgende tabell. Tallene i kolonnen under eksempelvis "Kvart-finale" er sannsynligheter per 1. juli for hendelsene at ulike land vil komme til kvartfinalen *eller lenger*. Nedenfor, i punkt a) til d), spør vi om hva ulike sannsynligheter var per 1. juli når vi legger til grunn Norsk regnesentrals modell, altså basert på tallene i tabellen. Oppgi svarene som tall mellom 0 og 1 med 3 siffrers nøyaktighet.

Land	Gr.	Gruppespill				Videre		Sluttspill					
		1. plass	2. plass	3. plass	4. plass	Ja	... som topp 8 3er	1/16-finale	1/8-finale	Kvart-finale	Semi-finale	Finale	
 Argentina	J	100 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	94,9 %	81,1 %	55,6 %	36,5 %	22,3 %
 Frankrike	I	100 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	100 %	74,2 %	57,4 %	33,6 %	18,6 %
 Spania	H	100 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	78,3 %	52,6 %	40,9 %	26,8 %	16,0 %
 Brasil	C	100 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	100 %	60,6 %	34,8 %	16,6 %	8,3 %
 Colombia	K	100 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	93,1 %	61,5 %	27,1 %	14,2 %	6,8 %
 England	L	100 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	85,3 %	47,9 %	26,1 %	12,4 %	6,2 %
 Portugal	K	0 %	100 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	60,3 %	26,0 %	17,1 %	9,1 %	4,3 %
 Norge	I	0 %	100 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	100 %	39,4 %	18,3 %	6,8 %	2,8 %
 Mexico	A	100 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	100 %	100 %	49,6 %	20,4 %	7,1 %	2,7 %

a) La A være hendelsen at Norge også vant 1/8-finalen mot Brasil. Hva var sannsynligheten for hendelsen A (per 1. juli)?

b) La B være hendelsen at Norge vant den påfølgende kvartfinalen. Hva var den betingede sannsynligheten for B gitt A (per 1. juli)?

c) Hva var den betingede sannsynligheten for B^c gitt A (per 1. juli)?

d) Hva var betinget sannsynligheten for A gitt B (per 1. juli)?

Maks poeng: 16

4 Oppgave 4

Norsk Regnesentrals prognoser for EM- og VM-mesterskap i fotball baserer seg på en sannsynlighetsmodell hvor antall mål X og Y til henholdsvis lag A og lag B i en gitt kamp antas å være uavhengige og Poissonfordelt med parametere som blant annet avhenger av styrkeforholdet mellom lagene A og B. Vi skal her betrakte en kamp der X antas å være Poissonfordelt med parameter $\mu_X = 1.2$ og Y antas å være Poissonfordelt med parameter $\mu_Y = 0.4$. Vi ser i det følgende også kun på kamper i gruppespillet. Disse avsluttes alltid etter to ordinære omganger slik at uavgjort er et mulig resultat (hendelsen $X = Y$) (ingen ekstraomganger og straffekonkurranse).

a) Diskuterer kort hvorfor Poissonantakelsen kan være rimelig og hvilke forutsetninger som da må være oppfylt. Hva er sannsynligheten for at resultatet i kampen blir 2 - 1 til lag A i en kamp mellom A og B under forutsetningene beskrevet ovenfor?

b) Utled et matematisk uttrykk for sannsynligheten for lag A vinner over lag B (hendelsen $X > Y$). Uttrykket skal være sammensatt av tallkonstanter, aritmetiske operasjoner (hvor addisjon eventuelt kan uttrykkes ved summasjonstegn $\sum$) og elementære funksjoner (nte røtter, eksponentialfunksjonen, logaritmer, trigonometriske funksjoner). Et slikt uttrykk sies å være på lukket form hvis det består av et endelig antall slik operasjoner og funksjoner. Er uttrykket ditt på lukket form?

c) Forklar hvordan du kan beregne et anslag av sannsynligheten for hendelsen i punkt b) ved simulering på datamaskin. Du kan forutsette at vi allerede har en algoritme for å simulere realisasjoner av Poissonfordelte variable, eksempelvis ved hjelp av funksjonen `numpy.random.poisson` i python. Angi din algoritme i pseudo- eller pythonkode. Dersom antall realisasjoner blir som i følgende tabell basert på totalt 1000 realisasjoner av kampresultatet, hva blir da ditt anslag av nevnte sannsynlighet?

x\y	0	1	2	3
0	221	83	18	2
1	233	107	11	1
2	132	67	6	2
3	61	17	4	0
4	23	6	1	0
5	3	2	0	0

d) Hva er forventning og varians til $X - Y$? Beregn en tilnærmet verdi for samme sannsynlighet som i punkt b) og c) ved bruk av normaltilnærming og kontinuitetskorreksjon.

Det anbefales å skrive svaret på utdelte ark men du kan også skrive i tekstfeltet under om du ønsker det.

Maks poeng: 24

5 Oppgave 5

Kamper i sluttspillet i VM i fotball som ender med uavgjort stilling etter ekstraomganger avgjøres ved straffekonkurranse. Hvilket lag som tar den første straffen avgjøres ved myntkast. I de $n = 16$ VM kampene mellom 1982 og 2002 som endte med straffekonkurranse, endte $x = 11$ med seier til det laget som fikk ta den første straffen. Disse dataene antyder dermed at laget som tar første straffe har større sannsynlighet for å vinne, kanskje fordi det kan gi et psykologisk overtak. Vi ønsker å gjennomføre en test av denne hypotesen.

a) Forklar hvorfor det er rimelig å anta at antall straffekonkurranser X som ender med seier til laget som tar første straffe er binomisk fordelt med parametere n og p . Formuler nullhypotese og alternativ hypotese og velg en passende testobservator. Merk at det her ikke er nødvendig å bruke normaltilnærming. Bestem forkastningsområdet når vi velger $\alpha = 0.05$ som signifikansnivå. Hva blir testens konklusjon?

b) Hva blir teststyrken dersom $p = 0.6$ og $n = 16$? Anslå også, ved å bruke nærmeste tabellverdi, hvor stor p må være for at vi skal få en teststyrke omtrent lik 0.8, fortsatt under forutsetning om at $n = 16$ og $\alpha = 0.05$.

Det anbefales å skrive svaret på utdelte ark men du kan også skrive i tekstfeltet under om du ønsker det.

Maks poeng: 12

6 Oppgave 6

I regnvær er det et problem at fotballer i lær tiltrekker seg vann og dermed kan bli betydelig tyngre i løpet av en gitt fotballkamp. For at en gitt ballmodell skal bli sertifisert av FIFA testes derfor ulike ballmodeller for vannabsorpsjon. Dette skjer i et laboratorium ved at tilsammen 3 testballer senkes ned i et basseng og komprimeres 250 ganger. Ballmodellen oppnår "FIFA Quality Pro"-sertifisering hvis ingen av testballene har en vektøkning større enn 10%.

En ballprodusent antar at vektøkningen (målt i %) til deres ballmodell i laboratorietesten over er normalfordelt med ukjent forventning μ og kjent standardavvik $\sigma = 2$. Ballprodusenten gjennomfører samme laboratorietest som FIFA og observerer $n = 10$ vektøkninger (i %) gitt ved $x_1, x_2, \dots, x_n = 3.75, 5.37, 3.33, 8.19, 5.66, 3.36, 5.97, 6.48, 6.15, 4.39$. Det oppgis at $\sum_{i=1}^n x_i = 52.64$ og at $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 299.075$. Vi antar at enkeltforsøkene er uavhengige.

- Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimator av μ blir $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Beregn estimatet av μ for dataene gitt ovenfor.
- Utledd et 95%-konfidensintervall for μ .
- Finn sannsynligheten for at 3 eksemplarer av ballprodusentens ballmodell vil bestå FIFAs sertifiseringstest uttrykt ved parameteren μ .
- Beregn et 95%-konfidensintervall for sannsynligheten i punkt c).

Det anbefales å skrive svaret på utdelte ark men du kan også skrive i tekstfeltet under om du ønsker det.

Maks poeng: 24