EKSAMEN Ma1000 for Kjemi/Maskin 9.12.2014.

OPPGAVE 1

a) Bestem grenseverdiene $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{2x}-1}$ og $\lim_{x\to 1} \cot(x-1)\cdot \ln x$.

b) Finn $y' = \frac{dy}{dx}$ for hver av funksjonene $y = \frac{\cos(x^2)}{x}$ og $y = 2\arctan\sqrt{x}$.

OPPGAVE 2

En funksjonen er gitt ved:

$$f(x) = 4\sin^3 x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/2 .$$

a) Finn alle globale maksimums- og minimumspunktene til $f(x)$.

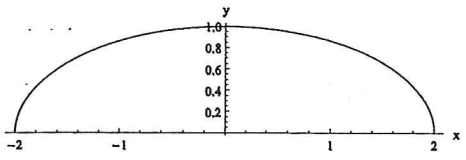
b) Grafen til $f(x)$ og x-aksen avgrenser en flate F i 1. kvadrant. Finn arealet av F.

OPPGAVE 3

En funksjon $y = f(x)$ er implisitt gitt ved:

$$x^2 + 4y^2 = 4, \quad -2 \le x \le 2 , \quad y \ge 0.$$

Grafen til $f(x)$, som vi kaller K, er tegnet i diagrammet til høyre.



a) Når flaten avgrenset av K og x-aksen roterer om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_x. Finn V_x.

b) Et rektangel har hjørner i punktene (x, y) og $(-x, y)$ på K og i $(x, 0)$ og $(-x, 0)$ på x-aksen der $x \ge 0$. Finn (x, y) slik at rektangelets areal blir størst mulig.

OPPGAVE 4

a) Hvilken algoritme/metode er implementert i skriptet nedenfor? Og hvilket konkret problem forsøker skriptet å estimere løsninga av?

```
h=(b-a)/n;  % må angi a,b og n før skriptet kjøres
S=(a*exp(2*a-1) + b*exp(2*b-1))*h/2;
for i=1:n-1
    x=a+h*i;
    S=S+x*exp(2*x-1)*h;
end
S
```

b) Hvilken verdi vil S nærme seg mot dersom skriptet kjøres med $a = 0$, $b = 1$ og stadig høyere verdier av n?

Oppgave 5

Vi betrakter matrisa A og vektorene $\vec{b}$, $\vec{c}$ og $\vec{x}$ gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

der a er en parameter og $\vec{x}$ en vektor av ukjente.

a) La først $a = 3$. Finn A^{-1} og løs ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ i dette tilfellet.

b) Bestem a slik at søylevektorene i A er lineært avhengige. Løs ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ i dette tilfellet og skriv den generelle løsningen på vektorform.

Oppgave 6

Løs initialverdiproblemet

$$y' \cdot \sqrt{1 - x^2} + y = 1, \qquad y(0) = 2.$$

Lag til slutt et skript (i MATLAB) som bruker en tilnærmingsmetode for å plotte grafen til funksjonen som løser initialverdiproblemet i intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Oppgave 7

Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$4y'' + 4y' + 10y = 36e^{-2x}.$$

Oppgave 8

Følgende matriser og vektorer er gitt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & t^2 - t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2t + 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

der $\vec{x}$ er en vektor av ukjente og t er en parameter. Dersom noe av det vi ber deg regne ut ikke er definert, skal du kort forklare hvorfor.

a) Regn ut $3B$, $2A - 3B$, AB og BA.

b) For alle $t \in \mathbb{R}$ skal vi nå drøfte ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$. Ved for eksempel å omforme totalmatrisa til $A\vec{x} = \vec{c}$ til ei radekvivalent matrise på trappeform skal du avgjøre når $A\vec{x} = \vec{c}$ har

   i) nøyaktig en løsning ii) uendelig mange løsninger iii) ingen løsning.

c) Finn $\det(A)$. For hvilke verdier av t er matrisa A invertibel? Sammenlign svaret med det du fant i b).

Oppgave 9

En 10 m lang stige står lent mot en vertikal husvegg. Stigens nedre ende begynner å skli horisontalt med konstant fart $\frac{1}{3}$ m/s. Finn farten som stigens øvre ende har nedover langs husveggen i det øyeblikk stigens nedre ende er 6 m fra husveggen.