NY/UTSATT EKSAMEN i Ma1000 for Kjemi/Maskin, 26.02.15

OPPGAVE 1

a) Bestem grenseverdiene $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)}{\tan x}$ og $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{\sin(x^2)}$.

b) Finn $y' = \frac{dy}{dx}$ for hver av funksjonene

i) $y = x\cdot\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ and ii) $y = 2x\arcsin\dfrac{1}{x}$.

OPPGAVE 2

En funksjonen $y = f(x)$ er gitt ved:

$$y = 2\sin(2x), \quad 0 \le x \le \pi/2.$$

Grafen til $f(x)$ og x-aksen avgrenser en flate F i 1. kvadrant.

a) Når F roterer om y-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_y. Finn V_y.

b) Når F roterer om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_x. Finn V_x.

OPPGAVE 3

a) Hvilken algoritme/metode er implementert i skriptet nedenfor? Og hvilket konkret problem forsøker skriptet å estimere løsningen av?

```
x1=0;  % startverdi x1, en skalar
x=1;
while abs(x1-x)>1e-6
    x=x1;
    y=2*exp(2*x)+2*x;
    Dy=4*exp(2*x)+2;
    x1=x-y/Dy;
end
x=x1
```

(Når vi kjører skriptet i MATLAB, får vi svaret $x = -0.4263$)

b) En funksjonen er gitt ved: $f(x) = e^{2x} + x^2$, $-2 \le x \le 1$. Finn det globale (dvs. absolutte) minimumspunktet til f (angi x og y-verdien med 3 desimaler).

OPPGAVE 4

a) Disse to matrisene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

er gitt. Finn B^{-1} og bruk dette til å finne ei 2×2 matrise X slik at $XB = C$.

(Vi oppgir svaret: $X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ fordi du kanskje kan få bruk for matrisa X i b).)

b) Om transformasjonen T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ vet vi at den er lineær og at

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Bestem standardmatrisa til T.

Oppgave 5

Finn den generelle løsningen av differensiallikningene

a) $2y' + 3x^2y^3 = y^3$.

b) $4y'' + 9y = 5\sin t + 10\cos t$.

Oppgave 6

Følgende matriser og vektorer er gitt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} b-1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

der $\vec{x}$ er en vektor av ukjente og a, b er parametere.

a) Regn ut $\frac{1}{2}B$ og BA. La $a = 2$ og sjekk at $BA = 2I$ der I er identitetsmatrisa. Hva kan du si om $\frac{1}{2}B$ ut fra denne regningen?

b) For alle $a, b \in \mathbb{R}$, finn først ut når ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ har

i) nøyaktig en løsning , ii) uendelig mange løsninger , iii) ingen løsning.

Finn så den generelle løsningen når ligningssystemet har uendelig mange løsninger.

Oppgave 7

En funksjon $y = f(x)$ er (i et intervall om $x = 2$) implisitt gitt ved:

$$y^3 - xy + 1 = 0 , \qquad f(2) = 1 .$$

a) Finn tangentens ligning i $(2, 1)$.

b) Finn Taylorpolynomet til $f(x)$ av orden 2 om $x = 2$. Vender grafen til $y = f(x)$ den hule siden opp eller ned i punktet $(2, 1)$?

OPPGAVE 8

I en 10 minutters periode kjører en bil med en fart $v = v(t)$ som oppfyller

$$v(t) = 70 + 120t \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{6}$$

der t måles i timer og $v(t)$ i km/time.

a) Finn hvor langt bilen kjører i denne perioden og finn gjennomsnittsfarten.
Bilens bensinforbruk, $b(v)$, målt i liter per mil, varierer med farten og er, når v er som i a), gitt ved

$$b(v) = \frac{v^2}{10000} \, .$$

b) Forklar hvorfor bensinforbruket i liter i et meget lite tidsintervall $[t, t + \Delta t]$ er tilnærmet gitt ved

$$\frac{1}{10} \cdot b(v) \cdot v \cdot \Delta t \, .$$

Bestem bensinforbruket for hele 10 minuttersperioden.

c) Vi tenker oss nå at farten v ikke er gitt ved formelen i a), men at en isteden har målt farten ved tiden $t = 0$ og for hvert 10. sekund i hele 10 minuttersperioden, dvs. at man har gjort 61 målinger av farten (i km/time) og at måleresultatene er $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{60}$ ved tidspunktene $0, 10, 20, 30, \ldots, 600$ (målt i sekunder). Hva blir bensinforbruket tilnærmet lik i hele 10 minuttersperioden uttrykt ved v_i-ene dersom formelen for $b(v)$ fortsatt gjelder? Skriv også et skript i MATLAB som beregner dette bensinforbruket ved å bruke måleresultatene $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{60}$.