Universitetet i Bergen
Det matematisk–naturvitenskapelige fakultet
Matematisk institutt

BOKMÅL

EKSAMEN I EMNET Mat 111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 14. desember 2015
Tid: 09:00–14:00

Tillatte hjelpemiddel: Lærebok (Adams & Essex: *Calculus - a complete course*) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Eksamen består av 5 oppgaver, med tilsammen 18 deloppgaver. Alle deloppgavene teller likt ved sensurering. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Regn ut (på formen $a + ib$)

$$\frac{2+4i}{2-2i}.$$

b) Tegn i det komplekse plan alle z slik at $z \cdot \overline{z} = 1$, og marker de komplekse røttene til $z^3 = -i$. Om vi tegner rette streker fra røttene til origo, hvilket bilmerke får vi da?

c) Regn ut på formen $z = a + ib$ alle de komplekse løsningene til likningen $z^3 = -8i$.

d) Vis at dersom et reelt polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, har en kompleks rot z, så må også $\overline{z}$ være en rot.
Hvorfor må alle reelle 3. grads polynom ha minst én *reell* rot?

Oppgave 2

a) Bestem grenseverdien $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$.

b) Bestem grenseverdien $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}$.

c) For hvilke verdier av a og b er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x \geq 1 \\ ax, & x < 1 \end{cases}$$

deriverbar for alle x?

Oppgave 3

a) Vis ved *skjæringssetningen* (intermediate value theorem) at likningen

$$\cos(x) = x\sin(x), \quad x \in [0, \pi/2] \tag{1}$$

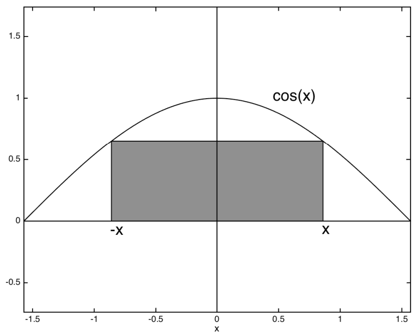
har (minst) en løsning.

b) Vis at likningen (1) har *bare én* løsning, herved kalt $x = r$.

c) Finn rektangelet med størst areal som kan plasseres mellom x-aksen og buen

$$\cos(x), -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,$$

som i figuren. Uttrykk svaret ved (det ukjente) tallet r i **b)**.



d) Finn en tilnærmet løsning til (1) ved å gjøre Newton iterasjon med

$$f(x) = \cos(x) - x\sin(x),$$

start i $x_0 = 0.8$. Vi ønsker svaret med 4 korrekte siffer etter komma.

e) Likningen (1) kan skrives på formen $\tan(x) = 1/x$, som gir $x = \tan^{-1}(1/x)$. Vis at for $g(x) = \tan^{-1}(1/x)$ så gjelder

$$|g(u) - g(v)| < |u - v| \quad \text{for alle } u, v > 0.$$

Hva sier dette om fikspunktiterasjonen $x_{n+1} = \tan^{-1}(1/x_n)$?

Oppgave 4 La $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

a) Vis at $I = \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} + 1$.

b) Regn ut $S_4 \approx \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx$ med Simpsons regel der du bruker 4 delintervall.
Ta med minst 5 siffer i mellomregningene.

c) Vis at $f(0) = 2, f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{1}{2}, f'''(0) = 0, f''''(0) = -\frac{3}{8}$.
Hint: vis først at $f(x)f'(x) = -x$ og bruk deretter implisitt derivasjon.

d) Finn 4. ordens Taylor polynom til $f(x)$ i $x = 0$, kalt $p_4(x)$. Regn ut $\int_0^{\sqrt{2}} p_4(x)dx \approx I$.

Oppgave 5 Løs initialverdiproblemene

a) $\sqrt{1 - x^2}\,\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$

b) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}, \quad y(0) = 10.$

Hans Munthe-Kaas Roman Kozlov