

**UNIVERSITETET I BERGEN**

Det matematisk-naturvitenskaplege fakultet

**Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I**

Måndag 19. desember 2016, kl. 09–14

Tillatne hjelpemiddel: Lærebok (“Calculus - a complete course” av R. A. Adams og C. Essex, 8. eller 7. utgåve, eller tidlegare utgåver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.

Opgåvesettet er på 3 sider (med oppgåvene 1-10) og er samansett av 15 deloppgåver som alle tel likt ved sensurering (til dømes tel oppgåve 1 like mykje som oppgåve 3a).

Les nøye gjennom oppgåvesettet. Alle svar skal grunngjevast, men grunngjevingane skal vere korte. Det må vere med nok mellomrekning til at framgangsmåten går tydeleg fram av det du skriv. Det vert gjeve godt med poeng for riktig framgangsmåte, sjølv om du ikkje kjem fram til korrekt svar.

**OPPGÅVE 1**

Gjeve det komplekse talet  $z = \sqrt{3} - i$ , der  $i$  er den imaginære eininga. Teikn inn  $z$  i det komplekse plan, skriv det på polarform og rekn ut  $z^9$ .

**OPPGÅVE 2**

Nytt den formelle definisjonen av grenseverdi ( $\epsilon - \delta$ -definisjonen) til å syne at

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x} = 3.$$

**OPPGÅVE 3**

Gjeve (den reelle) funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^{-1} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Avgjer om  $f$  er kontinuerleg i 0.  
 (b) Nytt definisjonen av den deriverte til å avgjere om  $f$  er derivérbar i 0.

**OPPGÅVE 4**

- (a) Rekn ut Taylorpolynomet  $P_2(x)$  av orden/grad 2 til funksjonen  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  om punktet 8.  
 (b) Nytt restleddet i Taylor sitt teorem til å finne *rasjonale* konstantar  $K$  og  $L$  slik at

$$P_2(x) + K(x - 8)^3 < \sqrt[3]{x} < P_2(x) + L(x - 8)^3 \text{ for } 8 < x < 27.$$

### OPPGÅVE 5

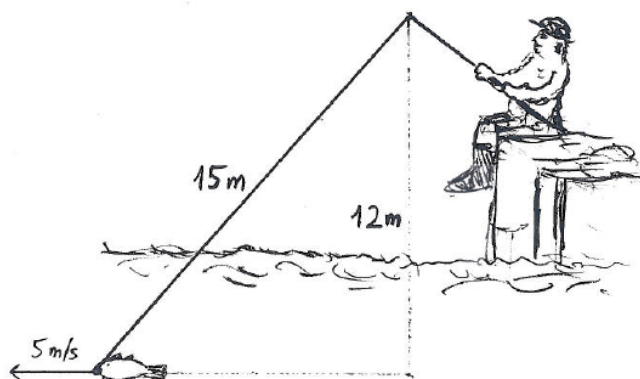
Gjeve (den reelle) funksjonen  $f(x) = x^3 e^{-x} + 2$ , definert for alle  $x \in \mathbb{R}$ .

- Syn at  $f'(x) = x^2 e^{-x}(3 - x)$  og avgjer kvar  $f$  er veksande og avtakande. Finn eventuelle globale maksima og minima.
- Syn at  $f$  har eit nullpunkt i intervallet  $[-1, 0]$ . Kor mange nullpunkt har  $f$  totalt (på heile  $\mathbb{R}$ )?
- Nytt Newton sin metode ein gong med startpunkt  $-1$  til å gje ein tilnærma verdi for nullpunktet til  $f$  i intervallet  $[-1, 0]$ . Grunnge, utan bruk av kalkulator eller innsetjing, om den verdien du har funne er for stor eller for liten i forhold til den verkelege verdien til nullpunktet.

### OPPGÅVE 6

Du sit på ei bryggje og fiskar. Ein fisk bit på kroken og sym rett frå bryggja med ein konstant fart av 5 m/s og ei konstant dybd av 12 m under toppen av fiskestanga.

Kor mange meter line spring ut av snella i sekundet i den augneblinken 15 m line er ute (målt frå toppen av stanga)?



### OPPGÅVE 7

Lat  $f$  og  $g$  vere (reelle) funksjonar som er kontinuerlege på intervallet  $[0, 1]$  og derivérbare på intervallet  $(0, 1)$ . Lat oss gå ut i frå at

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$$

og at det finst eit punkt  $p \in (0, 1)$  slik at

$$\int_0^p f(x) dx = \int_0^p g(x) dx.$$

Syn at det finst minst eitt punkt  $q \in (0, 1)$  slik at  $f'(q) = g'(q)$ .

(Hint: Du kan få nytte av funksjonen  $h(x) = \int_0^x (f(t) - g(t)) dt$ .)

**OPPGÅVE 8**

Rekn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

(Hint: nytt ein eigna substitusjon. Integralet skal løysast ved grunnleggjande integrasjonsteknikkar, ikkje ved å slå opp i permen i læreboka.)

**OPPGÅVE 9**

Lat  $R$  vere (det uavgrensa) området i planet mellom grafen til funksjonen  $f(x) = e^{-x^2}$  og  $x$ -aksa, for  $x \in [0, \infty)$ .

Finne volumet av (den uavgrensa) leikamen vi får når vi dreier  $R$  om  $y$ -aksa, eventuelt syn at det er uendeleg.

(Integral i utrekninga skal løysast ved grunnleggjande integrasjonsteknikkar, ikkje ved å slå opp i permen i læreboka.)

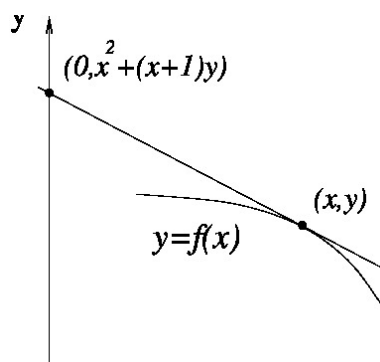
**OPPGÅVE 10**

(a) Løys startverdiproblemet

$$y'(x) = Ay(x) + Bx, \quad y(0) = y_0,$$

der  $A$ ,  $B$  og  $y_0$  er konstantar. (Svaret ditt kjem til å innehalde konstantane  $A$ ,  $B$  og  $y_0$ . Integral i utrekninga skal løysast ved grunnleggjande integrasjonsteknikkar, ikkje ved å slå opp i permen i læreboka.)

(b) Grafen  $y = f(x)$  til ein funksjon  $f$  går gjennom origo og har eigenskapen at tangentlina til grafen i eitkvart punkt  $(x, y)$  skjer  $y$ -aksa i punktet  $(0, x^2 + (x+1)y)$ . Finn  $f(x)$ .



**LUKKE TIL!**

Andreas Leopold Knutsen

Shirin Fallahi

Anders Husebø

Per Manne