

## UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

## Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 17. desember 2018, kl. 09–14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok (“Calculus - a complete course” av R. A. Adams og C. Essex, 9., 8. eller 7. utgave, eller tidligere utgaver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 4 sider (med oppgavene 1–12) og er sammensatt av 13 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (f.eks. teller oppgave 1 like mye som oppgave 7a).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Det blir gitt godt med poeng for riktig fremgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar.

**English translation follows on page 5.**

## OPPGAVE 1

Bruk matematisk induksjon til å vise at den  $n$ -te deriverte til funksjonen

$$f(x) = \ln(2x + 1), \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

er gitt ved

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} 2^n (n-1)!}{(2x+1)^n}$$

for alle heltall  $n \geq 1$ . (Husk at  $0! = 1$ .)

## OPPGAVE 2

Bruk den formelle definisjonen av grenseverdi (“ $\epsilon$ - $\delta$ -definisjonen”) til å vise at

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 5x + 2) = 8.$$

## OPPGAVE 3

Bestem konstanten  $c$  slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{\sin^{-1}(x)}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuert i 0.

*fortsetter... ↔*

**OPPGAVE 4**

Avgjør om funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

er derivérbar i 0.

**OPPGAVE 5**

Vis at kurven gitt ved ligningen

$$2xy + \sin y = 2\pi$$

går gjennom punktet  $(1, \pi)$  og finn ligningen til tangentlinjen i dette punktet.

**OPPGAVE 6**

Begrunn at funksjonen

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \in [1, \infty),$$

har en invers funksjon  $f^{-1}$  og finn et uttrykk for  $f^{-1}$ .

**OPPGAVE 7**

- (a) Vis at ligningen  $x^3 e^x = 1$  har nøyaktig én løsning (på hele  $\mathbb{R}$ ) og at løsningen ligger i intervallet  $(0, 1)$ .
- (b) Begrunn kort at løsningen på ligningen fra (a) er et fikspunkt til funksjonen

$$g(x) = e^{-\frac{x}{3}}.$$

Utfør så to trinn av fikspunktiterasjon med startverdi  $x_0 = 0$  for å finne en tilnærmet verdi  $x_2$  til løsningen og lag en skisse som forklarer hva som skjer. (Spesielt bør skissen forklare om  $x_2$  er større eller mindre enn den virkelige verdien til løsningen.)

**OPPGAVE 8**

La  $f$  være en vilkårlig dobbeltderivérbar reell funksjon definert på et åpent intervall  $I$  som inneholder 1 og 3. Anta at  $f(1) = 0$  og  $f'(1) = 1$  og at  $0 \leq f''(x) \leq 1$  for alle  $x \in I$ . Gi et minst mulig intervall hvor  $f(3)$  ligger.

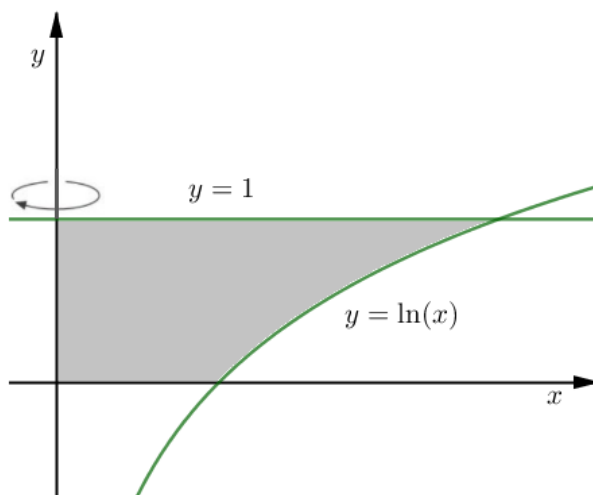
fortsetter...  $\leftrightarrow$

**OPPGAVE 9**

Beregn volumet av omdreiningslegemet som framkommer ved å dreie området i første kvadrant i planet avgrenset av kurvene

$$y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0 \quad \text{og} \quad y = \ln x$$

om  $y$ -aksen, som vist i figuren nedenunder. (Integral i beregningen skal løses ved grunnleggende integrasjonsteknikker, ikke ved å slå opp i permen i læreboken.)

**OPPGAVE 10**

Beregn det uegentlige integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

(Integral i beregningen skal løses ved grunnleggende integrasjonsteknikker, ikke ved å slå opp i permen i læreboken.)

**OPPGAVE 11**

Begrunn at funksjonen

$$f(x) = \int_0^{\tan^{-1}(x)} e^{\tan t} dt$$

er definert for alle  $x \in \mathbb{R}$  og beregn  $f'(x)$ . (Skriv svaret på enklest mulig form.)

*fortsetter...*  $\hookrightarrow$

**OPPGAVE 12**

Et skip går med en fart av 25 km/time. Plutselig ryker motoren. Etter dette avtar farten  $v(t)$  til enhver tid med en rate som er proporsjonal med kvadratet av farten. Etter en halv time er farten redusert til 5 km/time.

Hvor lang tid tar det før farten har sunket til 1 km/time?

(Hint: sett opp en differensialligning som farten oppfyller.)

**LYKKE TIL!**

Andreas Leopold Knutsen

Shirin Fallahi

Per Manne

## English translation of Exam in MAT111 – Autumn 2018

**Warning:** The following translation for the examination in MAT111 is not an official one. Thus, complaints cannot be made on the basis of possible errors in this text.

Aids permitted: Textbook (“Calculus - a complete course” by R. A. Adams and C. Essex, 9th, 8th or 7th edition, or earlier editions by R. A. Adams) and calculator, according to the rules of the faculty.

The problem set consists of 4 pages (with problems 1–12) and consists of 13 subproblems that all count equally (for instance: problem 1 counts as much as problem 7a).

Read the problem set thoroughly. Give reasons for all your answers, but in a short and concise way. You should include enough calculations to make your methods transparent. Credits will be given for correct methods, even if you do not reach a correct answer.

### PROBLEM 1

Use mathematical induction to prove that the  $n$ -th derivative of the function

$$f(x) = \ln(2x + 1), \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

is given by

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} 2^n (n-1)!}{(2x+1)^n}$$

for all integers  $n \geq 1$ . (Recall that  $0! = 1$ .)

### PROBLEM 2

Use the formal definition of limit (the “ $\epsilon$ - $\delta$ -definition”) to show that

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 5x + 2) = 8.$$

### PROBLEM 3

Find the constant  $c$  such that the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{\sin^{-1}(x)}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

becomes continuous in 0.

*continues... ↔*

**PROBLEM 4**

Determine whether the function

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is differentiable in 0.

**PROBLEM 5**

Show that the curve given by the equation

$$2xy + \sin y = 2\pi$$

passes through the point  $(1, \pi)$  and find the equation of the tangent line in this point.

**PROBLEM 6**

Justify that the function

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \in [1, \infty),$$

has an inverse function  $f^{-1}$  and find an expression for  $f^{-1}$ .

**PROBLEM 7**

- (a) Show that the equation  $x^3 e^x = 1$  has precisely *one* solution (on the whole of  $\mathbb{R}$ ) and that the solution lies in the interval  $(0, 1)$ .  
 (b) Justify briefly that the solution of the equation from (a) is a fixed point of the function

$$g(x) = e^{-\frac{x}{3}}.$$

Then perform two steps of fixed point iteration with starting point  $x_0 = 0$  to find an approximate value  $x_2$  of the solution and make a sketch explaining what goes on. (The sketch should in particular explain whether  $x_2$  is bigger or smaller than the real value of the solution.)

**PROBLEM 8**

Let  $f$  be an arbitrary twice differentiable real function defined on an open interval  $I$  containing 1 and 3. Assume that  $f(1) = 0$  and  $f'(1) = 1$  and that  $0 \leq f''(x) \leq 1$  for all  $x \in I$ . Find a smallest possible interval containing  $f(3)$ .

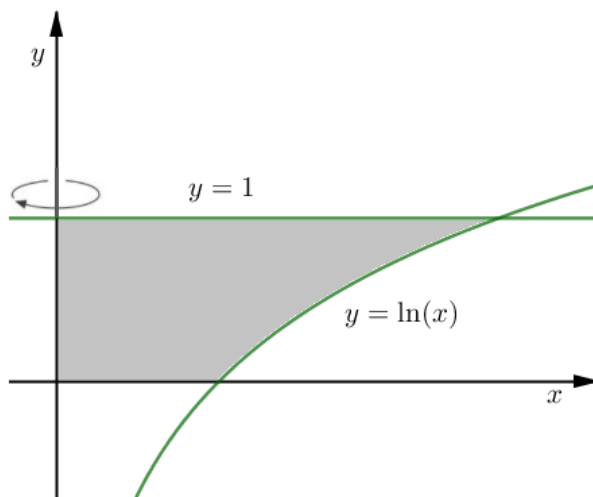
*continues...*  $\leftrightarrow$

**PROBLEM 9**

Find the volume of the solid of revolution obtained by rotating the region in the first quadrant in the plane bounded by the curves

$$y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0 \quad \text{and} \quad y = \ln x$$

about the  $y$ -axis, as shown in the figure below. (Integrals in the computation should be solved by means of fundamental integration techniques, not by looking into the cover of the textbook.)

**PROBLEM 10**

Compute the improper integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

(Integrals in the computation should be solved by means of fundamental integration techniques, not by looking into the cover of the textbook.)

**PROBLEM 11**

Justify that the function

$$f(x) = \int_0^{\tan^{-1}(x)} e^{\tan t} dt$$

is defined for all  $x \in \mathbb{R}$  and compute  $f'(x)$ . (Write the answer in the simplest possible form.)

*continues...*  $\leftrightarrow$

**PROBLEM 12**

A ship moves at a speed of 25 km/hour. Suddenly the engine fails. At any time after this the speed  $v(t)$  decreases at a rate proportional to the square of the speed. After half an hour the speed is reduced to 5 km/hour.

How long does it take until the speed is reduced to 1 km/hour?

(Hint: write down a differential equation satisfied by the speed.)

**GOOD LUCK!**

Andreas Leopold Knutsen      Shirin Fallahi      Per Manne