

LØSNINGSFORSLAG

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I
Mandag 13. desember 2019, kl. 09–14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok (“Calculus - a complete course” av R. A. Adams og C. Essex, 9., 8. eller 7. utgave, eller tidligere utgaver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1–7) og er sammensatt av 17 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (f.eks. teller oppgave 1a like mye som oppgave 7).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Det blir gitt godt med poeng for riktig fremgangsmåte, selv om du ikke kommer frem til korrekt svar.

OPPGAVE 1

(a) *Skriv de komplekse tallene nedenfor på normalform (på formen $a + ib$):*

$$(i) \quad \frac{2 + 3i}{1 + 4i} \quad (ii) \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9.$$

(i) Vi husker at for et komplekst tall $z = a + ib$ forskjellig fra null er $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)$ og får

$$\frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 + 3i)(1 - 4i)}{1^2 + 4^2} = \frac{2 + 12 + (3 - 8)i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i$$

(ii) Vi omskriver først til polarform $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = re^{i\theta}$ der $r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ og $r \cos \theta = \frac{1}{2}$ som gir $\theta = -\pi/3$ siden vi er i fjerde kvadrant (tegn gjerne en liten tegning). Derfor har vi

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9 = \left(e^{-i\pi/3}\right)^9 = e^{-i3\pi} = -1,$$

siden $e^{i3\pi} = e^{i\pi+2\pi i} = e^{i\pi} = -1$.

(b) *Finn alle løsningene til ligningen $z^3 = -1$ og skriv dem på normalform.*

Om $c = re^{i\theta}$ og $z^n = c$ er $z = z_k$ for $k = 0, \dots, n - 1$ hvor $z_k = r^{1/n}e^{i\theta/n+2\pi k/n}$. For $n = 3$ og $c = -1 = e^{i\pi}$ gir dette løsningene til $z^3 = -1$ er

(0) $z_0 = e^{i\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2,$

(1) $z_1 = e^{i\pi/3+2\pi/3} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$

(2) $z_2 = e^{i\pi/3+4\pi/3} = \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

(c) *Faktoriser $z^3 + 1$ i lineære faktorer over \mathbb{C} og i lineære og kvadratiske faktorer over \mathbb{R} .*

Her er det er flere mulige måter å gå frem på. Det enkleste er nok å se at $z + 1$ er en faktor i $z^3 + 1$ og begå polynomdivisjon

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = (z + 1)(z - (1/2 + i\sqrt{3}/2))(z - (1/2 - i\sqrt{3}/2)),$$

der $(z+1)(z^2 - z + 1)$ er faktoriseringen i \mathbb{R} (siden $z^2 - z + 1$ er uten reelle røtter) og den siste er faktoriseringen i \mathbb{C} .

Alternativt kan man starte med at vi i (b) fant de komplekse røttene -1 , $1/2 + i\sqrt{3}/2$ og $1/2 - i\sqrt{3}/2$ til $z^3 + 1$ noe som umiddelbart gir faktoriseringen $(z+1)(z - (1/2 + i\sqrt{3}/2))(z - (1/2 - i\sqrt{3}/2))$ i lineære faktorer over \mathbb{C} , for derefter å multiplisere de to konjugerte faktorene $(z - (1/2 + i\sqrt{3}/2))(z - (1/2 - i\sqrt{3}/2)) = z^2 - z + 1$ og få den reelle faktoriseringen.

OPPGAVE 2

En kiselalge (*Tacphoria arlyc* Ketil, 2019) blomstrer i takt med tilgangen på næring, slik at den totale massen $y(t)$ (i megatonn) kiselalger i Beringhavet ved tid t (i måneder etter nyttår) tilfredsstiller differensialligningen

$$y'(t) = k \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \cdot y(t),$$

der k er en konstant. Gitt at $y(0) = 100$ og $y(6) = 400$, finn $y(t)$.

Vi ser at vi har en separabel differensialligning. Den konstant løsning $y(t) \equiv 0$ vil ikke tilfredsstiller initialbetingelsen.

Finner de andre løsningene på vanlig måte: deler på $y(t)$ og integrerer med hensyn på t

$$\int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_0^T k \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) dt$$

(om man foretrekker å gjøre det med ubestemte integraller og til slutt sette inn initialbetingelsen for å finne integrasjonskonstantene, er det selvsagt like bra). Ved substitusjonen $u = y(t)$ er venstre side

$$\int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_{y(0)}^{y(T)} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_{y(0)}^{y(T)} = \ln(y(T)) - \ln 100,$$

mens høyresiden er

$$\int_0^T k \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) dt = -k \frac{6}{\pi} [\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)]_0^T = -k \frac{6}{\pi} (\cos\left(\frac{\pi T}{6}\right) - 1),$$

så

$$\ln \frac{y(T)}{100} = -k \frac{6}{\pi} (\cos\left(\frac{\pi T}{6}\right) - 1).$$

Setter vi $T = 6$ og $y(6) = 400$ får vi

$$\ln \frac{400}{100} = -k \frac{6}{\pi} (\cos\left(\frac{\pi 6}{6}\right) - 1) = k \frac{6}{\pi},$$

eller m.a.o. $k = \frac{\pi \ln 2}{6}$. Følgelig er

$$y(t) = 100 \cdot e^{-\ln 2 (\cos(\frac{\pi t}{6}) - 1)} = 100 \cdot 2^{1 - \cos(\frac{\pi t}{6})} = 200 \cdot 2^{-\cos(\frac{\pi t}{6})}.$$

Vi merker oss at kiselalgen har en årlig sykel der bestanden er uendret fra år til annen.

OPPGAVE 3

(a) Bruk den formelle definisjonen av grenseverdi (“ ϵ - δ -definisjonen”) til å vise at

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3,$$

La $f(x) = x^2 + x + 1$ (definert for alle reelle x). Vi må vise at, gitt $\epsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon.$$

Den ønskede konklusjonen,¹ $|f(x) - 3| = |(x^2 + x + 1) - 3| < \epsilon$, er det samme som $|x - 1||x + 2| < \epsilon$. Leddet $|x - 1|$ blir lite, så vi må få kontroll på $|x + 2|$. Om $0 < x < 2$ (m.a.o. $|x - 1| < 1$: greit siden vi skal se på grensen når x går mot 1) er $2 < x + 2 < 4$, så $|x - 1||x + 2| < 4|x - 1|$, noe som skulle indikere at $\delta = \epsilon/4$ kunne fungere.

Vi setter derfor $\delta = \min\{\epsilon/4, 1\}$ og sjekker at vi får ønskede konklusjon: om $0 < |x - 1| < \delta$, så er

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= |(x^2 + x + 1) - 3| = |(x - 1)(x + 2)| \\ &<^{\text{fordi } \delta \leq 1} 4|x - 1| <^{\text{fordi } \delta \leq \epsilon/4} \epsilon, \end{aligned}$$

hvilket var hva vi skulle bevise.

(b) La f og g være deriverbare funksjoner og a et reelt tall slik at

$$f(a) = g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0.$$

Begrunn at

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Du får bare bruke definisjonen av den deriverte og grensesetningene, ikke f.eks. l'Hôpital's regel.

Fra definisjonen av den deriverte får vi

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}}.$$

Siden begge grensene i brøken til høyre antas å eksistere og nevneren ikke går mot null kan vi bruke grensesetningen for kvotient:

$$\frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Den siste likheten kommer av at $f(a) = g(a) = 0$ (og at $h \rightarrow 0$ er det samme som at $x = a + h \rightarrow a$).

(c) Bruk konklusjonen i deloppgave (b) til å regne ut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}.$$

¹Denne paragrafen forklarer hvordan jeg tenker for å komme frem til den jeg som jeg bruker neste paragraf, som er det egentlige argumentet som løser oppgaven.

Med $f(x) = x$, $g(x) = e^x - 1$ og $a = 0$ ser vi at betingelsene for deloppgave (b) er tilfredstilt:² $f(0) = 0$, $g(0) = e^0 - 1 = 0$ og $g'(x) = e^x$, $g'(0) = e^0 = 1 \neq 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1.$$

OPPGAVE 4

Regn ut integralene ved grunnleggende integrasjonsteknikker (ikke ved å slå opp i permenn i læreboken).

(a)

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 15}.$$

Delbrøksoppspalting $\frac{1}{x^2+2x-15} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+5}$, eller m.a.o.

$$1 = A(x+5) + B(x-3)$$

gir $A = \frac{1}{8}$ og $B = -\frac{1}{8}$ (sett f.eks. $x = -5$ og $x = 3$), så

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 15} = \int \left(\frac{\frac{1}{8}}{x-3} - \frac{\frac{1}{8}}{x+5} \right) dx = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-3}{x+5} \right| + C.$$

(b)

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

(Hint: bruk delvis integrasjon).

Regelen for delvis integrasjon sier

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx,$$

så om vi lar $f(x) = \tan^{-1} x$ og $g'(x) = 1$ med $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ og $g(x) = x$ får vi

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx = [x \tan^{-1} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2+1} = [x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2,$$

der vi brukte substitusjonen $u = x^2 + 1$ i det siste integralet.

(c)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Dette er et uegentlig integral (siden nevneren av integranden blir null i $x = 1$) og vi regner først ut $\int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ for $b \in (0, 1)$.

Vi forsøker substitusjonen $x = \sin \theta$, $dx = \cos \theta \, d\theta$ med $\theta \in [0, b]$ og $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $x = b \Rightarrow \theta = \sin^{-1} b$ og får (siden $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| = \cos \theta$ når

²i en "gratisoppgave" som denne legges det vekt på føring: her er minstekravet at dere lister opp hvorfor betingelsene er oppfylt

$$\begin{aligned}
\theta &\in [0, b] \subseteq [-\pi/2, \pi/2] \\
\int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\sin^{-1} b} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\sin^{-1} b} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\sin^{-1} b} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\sin^{-1} b} = \frac{1}{2} \left[\theta - \sin \theta \cos \theta \right]_0^{\sin^{-1} b} \\
&= \frac{1}{2} (\sin^{-1} b - b\sqrt{1-b^2}).
\end{aligned}$$

Her har vi brukt identitetene $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ og $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.

Siden $\lim_{b \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} (\sin^{-1} b - b\sqrt{1-b^2}) = \frac{1}{2} (\sin^{-1} 1 - 1\sqrt{1-1^2}) = \pi/4$ (funksjonene som inngår er alle kontinuerlige), så får vi

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

OPPGAVE 5

Betrakt funksjonen $f: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 1]$ gitt ved $f(x) = 1 - 2x \tan^{-1} x$.

(a) Vis at f er invertibel.

Notasjonen $f: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 1]$ betyr at definisjonsmengden til f er intervallet $[0, \infty)$ mens alle verdiene ligger i intervallet $(-\infty, 1]$. Vi starter med å avklare noen fakta som vi vil få bruk for underveis: Funksjonen f er kontinuerlig og deriverbar på $(0, \infty)$. Siden $f(0) = 1$ og grensen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ (husk at $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \pi/2$) gir skjæringssetningen at verdimengden er hele $(-\infty, 1]$.

Siden $f'(x) = -2 \tan^{-1} x - \frac{2x}{x^2+1} < 0$ for alle $x > 0$ (både $\tan^{-1} x$ og $\frac{2x}{x^2+1}$ er positive for $x > 0$) er (ved sekantsetningen) f strengt avtagende på hele sin definisjonsmengde $[0, \infty)$. Siden f er strengt avtagende på intervallet $[0, \infty)$ er den én-til-én og har derfor en invers.

Du kan også argumentere for at f er én-til-én rett fra Rolles teorem om du foretrekker det: om $f(x_0) = f(x_1)$ for to ulike punkter x_0 og x_1 i $[0, \infty)$ må det finnes et punkt c mellom x_0 og x_1 der $f'(c) = 0$, hvilket ikke er tilfelle siden $f'(x)$ bestandig er negativ.

(b) Vis at $f(x) = 0$ har en entydig løsning $x = b$ der $b \in (0, 1)$.

At vi har et entydig nullpunkt b er egentlig gratis fra det vi sa under punkt (a): f er én-til-én og verdimengden $(-\infty, 1]$ inneholder 0. Men er $b \in (0, 1)$? Ja – ved skjæringssetningen og det faktum at f er kontinuerlig – siden $f(0) = 1 > 0$ og

$$f(1) = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \tan^{-1}(1) = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0.$$

(c) Finn en tilnærming x_1 av nullpunktet b ved å bruke Newtons metode med én iterasjon og startverdi $x_0 = 1$.

Newtons metode $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ med $x_0 = 1$ gir

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{-2\frac{\pi}{4} - \frac{2}{1^2+1}} = \frac{4}{\pi + 2}$$

(d) Bruk krumningen og om grafen $y = f(x)$ vokser eller avtar til å forklare hvorfor Newtons metode gir en følge $1 = x_0, x_1, x_2, \dots$ av tall som avtar mot b : med andre

ord, vis ulikhetene

$$x_0 > x_1 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots > b.$$

Her holder et geometrisk argument langt på vei.³ For ordens skyld gir jeg et forsiktig og presist argument (tegn tegning selv!!)

Ved induksjon er alt vi trenger å vise at om $x_n > b$, så er $x_n > x_{n+1} > b$. Vi er i situasjonen der

- (1) $f(x) < 0$ hvis og bare hvis $x > b$,
- (2) $f'(x) < 0$ for alle $x \in (b, x_0]$ (grafene er strengt avtagende) og
- (3) $f''(x) = \frac{-4}{(x^2+1)^2} < 0$ for alle $x \in (b, x_0]$ (grafene krummer nedover).

Anta $x_n \in (b, x_0]$. Da er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

siden både $f(x_n)$ og $f'(x_n)$ er negative.

Det gjenstår å vise at $b < x_{n+1}$. For å se det kan man bruke Taylor's formel med restledd ("om $a = x_n$ ") som sier at

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(s)}{2}(x - x_n)^2$$

for en s mellom x og x_n .⁴ Setter jeg $x = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (der tangenten skjærer y -aksen) får jeg

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(s)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &= \frac{f''(s)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 < 0, \end{aligned}$$

der ulikheten følger av at $f''(s) < 0$ (og at $x_n \neq x_{n+1}$, som vi jo viste i forrige paragraf). Følgelig er $b < x_{n+1}$.

OPPGAVE 6

(a) Bruk trapesmetoden med fire delintervall for å finne en tilnærming til integralet

$$\int_0^1 (1+t^4)^{3/2} dt.$$

³Du vil trenge de tre punktene listet under og du må formulere deg slik at det blir både meningsfylt og riktig (test det ved å prøve å forklare deg for en medstudent og tegn en tegning som er så stor og tydelig at det går an å se hva som skjer!)

⁴Den siste summanden, $\frac{f''(s)}{2}(x - x_n)^2$, forteller oss hva som er feilen med å bytte ut f med sin tangent i x_n .

La $f(t) = (1 + t^4)^{3/2}$. Om vi deler $[0, 1]$ i fire delintervaller er bredden av hvert delintervall $\Delta t = \frac{1}{4}$ og

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{\Delta t}{2} \left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{257^{3/2}}{2048} + \frac{17^{3/2}}{32} + \frac{337^{3/2}}{2048} + 2^{3/2} \right) \\ &\approx 1.3814135. \end{aligned}$$

- (b) *Hvor mange ledd må en bruke i trapesmetoden for å tilnærme $\int_0^1 (1 + t^4)^{3/2} dt$ med en presisjon bedre eller lik 0,04?*

La $f(t) = (1 + t^4)^{3/2}$ og $I = \int_0^1 f(t) dt$. Vi tar utgangspunkt i formelen for restleddet for trapesmetoden:

$$|I - T_n| \leq \frac{K(1-0)^3}{12n^2} = \frac{K}{12n^2},$$

der $K \geq |f''(t)|$ for alle $t \in [0, 1]$.

Derivérer vi (vis mellomregning slik at du får uttelling selv om svaret er feil), får vi at $f'(t) = 6t^3(1 + t^4)^{1/2}$ og

$$f''(t) = \frac{6t^2(5t^4 + 3)}{\sqrt{1 + t^4}}.$$

Vi skal finne en K som er større eller lik $|f''(t)|$ for $t \in [0, 1]$. Dette kan vi gjøre ved å finne maksimum (siden f er derivérbar er maksimum i et kritisk punkt eller i et endepunkt; se under) eller vi kan gå litt mer avslappet til verks: Ved å betrakte teller og nevner hver for seg (maksimere teller, minimere nevner) har vi at

$$|f''(t)| \leq 6(5 + 3)1^{-1/2} = 48.$$

Setter vi dette inn i trapesmetodens feilestimat er $\frac{48(1-0)^3}{12n^2} = \frac{4}{n^2}$ og om dette skal være mindre eller lik enn $4 \cdot 10^{-2}$ får vi $n \geq 10$.

Om vi er riktig nidkjære kan vi gå voldsommere til verks:

$$f'''(t) = \frac{12t(10t^8 + 15t^4 + 3)}{(t^4 + 1)^{3/2}} > 0$$

for $t > 0$. Dermed er $f''(t)$ (ikke negativ og) strengt voksende på $[0, 1]$ og $|f''(t)| \leq f''(1) = 24\sqrt{2}$. Derved vil kravet bli $\frac{24\sqrt{2}}{12n^2} = \frac{2\sqrt{2}}{n^2} \leq 4 \cdot 10^{-2}$, eller $\frac{10}{2^{1/4}} \leq n$. Dette gir $n = 9$.⁵

⁵ Både argumentasjonen som leder til $n = 10$ og $n = 9$ er fullt tilfredsstillende.

Siden $f''(t)$ aldri er negativ er kan vi til og med si at $I \leq T_n$, så T_n overestimerer. Ved å ta hensyn til det kan vi angi I enda mer nøyaktig.

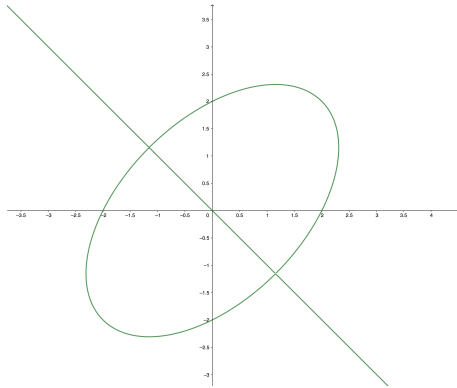
Ved å regne ut I med enda flere desimaler kan man i ettertid konstatere at allerede $T_5 \approx 1.366$ var mindre enn 0.04 fra $I \approx 1.340$.

OPPGAVE 7

Et veinett er gitt ved ligningen

$$x^3 + y^3 = 4x + 4y.$$

Du kjører på denne veien: ved tid t er du i punktet $(x(t), y(t))$, der $x(t)$ og $y(t)$ er deriver-



bare funksjoner som tilfredstiller likningen $x(t)^3 + y(t)^3 = 4x(t) + 4y(t)$.

Om $(x(0), y(0)) = (0, 2)$ og $y'(0) = 6$, hva er $x'(0)$?

Deriverer vi ligningen $x(t)^3 + y(t)^3 = 4x(t) + 4y(t)$ m.h.p. t får vi ved kjerneregelen at

$$3x(t)^2 x'(t) + 3y(t)^2 y'(t) = 4x'(t) + 4y'(t).$$

Setter vi inn $t = 0$ i denne ligningen får vi

$$3 \cdot 0^2 \cdot x'(0) + 3 \cdot 2^2 \cdot 6 = 4 \cdot x'(0) + 4 \cdot 6$$

som vi løser for $x'(0)$ og får $x'(0) = 12$.