LØSNINGS***FORSLAG***

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I

Onsdag 2. desember 2020, kl. 09–14

OPPGAVE 2

(a) Tegn fortegnsskjema for alle funksjonene og deres deriverte. Da ser du at g og h' matcher ingen annen funksjon mens det er mulig at $f = g'$ og $h = f'$. Riktig svar må derfor være "f". [1]

(b) Den deriverte til en funksjon f i et punkt x er grensen $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Ved vanlige derivasjonsregler (kjerneregel, regel for derivert av kvotient osv) er den gitte funksjonen deriverbar i alle punkt, bortsett muligens fra i 0.

Siden deriverbarhet medfører kontinuitet må vi ha at $a = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, men siden både eksponensiering og tangens invers er kontinuerlige er $\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{b\tan^{-1}(0)} = 1$, så vi må i hvert fall ha $a = 1$.[2]

Vi sjekker grensen $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$. Når $h < 0$ er $\frac{f(h)-1}{h} = \frac{e^{b\tan^{-1}(h)}-1}{h}$ og når h går mot null er dette (definisjonen av) den deriverte

$$\frac{d}{dt} e^{b\tan^{-1}(t)}\bigg|_{t=0} = \frac{b}{1+t^2} e^{b\tan^{-1}(t)}\bigg|_{t=0} = b.^{3}$$

Når $h > 0$ har vi grensen

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\tan^{-1}+2t^2}{t} - 1}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan^{-1} h + 2h^2 - h}{h^2} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h^2} + 4h - 1}{2h} \\
&\overset{(!)}{=} \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{h/2}{1+h^2} + 2 \right) = \frac{0/2}{1+0^2} + 2 = 2
\end{aligned}$$

der likheten merket (!) bare er rydding slik at vi kan bruke kontinuitet og likheten merket $(*)$ er l'Hôpitals regel: teller og nevner er deriverbare funksjoner som går mot null når $h \to 0^+$ og den deriverte $(2h)$ av nevneren er ulik null for $h > 0$ pluss at jo vi nettopp så at grensen på høyre side eksisterer.

For at $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ skal eksistere må de ensidige grensene eksistere og være like, hvilket skjer nøyaktig når $(a = 1)$ og $b = 2$.[4]

---

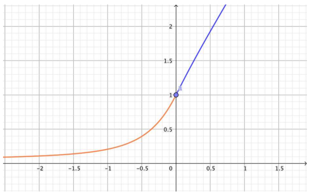
[1] til de som leste "andrederivert" i stedet for "anti-derivert": Skrev dere et rett argument i den siste nedlastningsboksen har dere fått poeng, ellers ikke.

[2] for at f skal være kontinuerlig må vi også ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, men vi ser om litt at f er deriverbar, så det er overflødig

[3] dere kunne også bare regnet ut grensen - like rett

[4] Hvis man hoppet over steget via kontinuitet ville man ha sett at de ensidige grensene eksisterte hvis og bare hvis $a = 1$.

Noen insisterer på å se på $\lim_{t\to 0^\pm} f'(t)$. Det er ingenting i boken eller som vi diskuterte H20 som sier at det er relevant for oppgaven (og gir derfor minimal uttelling), selv om du "tilfeldigvis" finner (delvis) "riktig svar" $b = 2$ også på denne måten.



OPPGAVE 3[5]

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1 + i.$$

$$1/z = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} = \frac{1}{2}(-1-i).$$

$$z^9 = (\sqrt{2})^9 e^{9\frac{3\pi i}{4}} = 16\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}+2\pi i} = 16z.$$

$$\frac{1}{z} + z^9 = \frac{1}{2}(-1-i) + 16(-1+i) = -\frac{33}{2} + \frac{31}{2}i.$$

OPPGAVE 4

(a) For at f skal være kontinuerlig i $x = 3$. må $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$, eller m.a.o. gitt $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ s.a.

$$0 < |x-3| < \delta,\ x \neq 0 \Rightarrow |\frac{9}{x} - \frac{9}{3}| < \epsilon.$$

Nåh, $|\frac{9}{x} - \frac{9}{3}| = \frac{3}{|x|}|x-3|$. Siden $\frac{3}{|x|}$ er strengt avtagende for $x > 0$, så har vi implikasjonene

$$|x-3| < 1 \Rightarrow x \in (2,4) \Rightarrow \frac{3}{|x|} < \frac{3}{2} \Rightarrow |\frac{9}{x} - \frac{9}{3}| < \frac{3}{2}|x-3|.$$

Så, gitt, $\epsilon > 0$, om $\delta = \min\{1, \frac{2}{3}\epsilon\}$ så vil $|x-3| < \delta$ medføre at $|\frac{9}{x} - \frac{9}{3}| < \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\epsilon = \epsilon$.

(b) En funksjon $f\colon D_f \to V_f$ har en invers dersom der fins en funksjon $g\colon V_f \to D_f$ slik at for alle $x \in D_f$ og $y \in V_f$

$$g(f(x)) = x \text{ og } f(g(y)) = y.$$ [6]

Funksjonen f som gitt i oppgaven har en invers: sett $g(x) = \frac{9}{x}$,[7] så har vi at for alle $x, y \neq 0$, så er

$$g(f(x)) = \frac{9}{\frac{9}{x}} = x \text{ og } f(g(y)) = \frac{9}{\frac{9}{y}} = y.$$

[5] $1/z = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \ldots$ er også fint. Noen puttet inn uønskede paranteser og fant $1/(z+z^9)$ istedet, men siden det er akkurat like vanskelig trekker vi ikke mye for det.

[6] slik boken uttrykker det i Def. 2 i Kap. 3.1 er det ikke godt å si om dette er definisjonen (som er slik jeg har gjort det i forelseningene) eller det at f er én-til-én (Def. 1), så begge deler har fått rett.

[7] Her er vi i den litt uvanlige situasjonen at vi faktisk kan finne en invers ved å løse $y = f(x) = \frac{9}{x}$ for x og finner at f er sin egen invers!

Noen viste at $9/x_1 = 9/x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, og det er også fint.

Et argument som bygger på at f er strengt avtagende på hhv. $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$ må formuleres med litt kløkt siden definisjonsmengden ikke er et intervall, f.eks. ved å påpeke at bildene til $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$ ikke overlapper.

OPPGAVE 5

Avstanden $z(t)$ mellom fartsmåleren og bilen ved tid t tilfredsstiller
$$z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2.$$
Vi får at $z(0) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ og ved derivasjon av ligningene som knytter x, y og z sammen får vi ved kjerne- og produktregelen at
$$\begin{aligned} 3x(t)^2x'(t) + 3y(t)^2y'(t) &= 9x'(t)y(t) + 9x(t)y'(t) + 0 \\ 2z(t)z'(t) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \end{aligned}$$
som, når vi setter $t = 0$ blir [8]
$$\begin{aligned} 3 \cdot 0^2x'(0) + 3 \cdot 1^2y'(0) &= 9x'(0) \cdot 1 + 9 \cdot 0y'(0) + 0 \\ 2 \cdot 1 \cdot 50 &= 2 \cdot 0x'(0) + 2 \cdot 1y'(0) \end{aligned}$$
som vi kan løse for $x'(0)$ og få $x'(0) = 50/3$ (kilometer i timen[9]).

OPPGAVE 6

(a) Funksjonen gitt ved $f(x) = x^4 + x - 1$ er kontinuerlig, så da
$$f(-2) = 16 - 2 - 1 > 0 > f(-1) = 1 - 1 - 1$$
sier skjæringssetningen at f har et nullpunkt i intervallet $(-2, -1)$. Da f er deriverbar og $f'(x) < 0$ for alle $x \in (-2, -1)$ (den deriverte $f'(x) = 4x^3 + 1$ er voksende og $f'(-1) = -4 + 1 < 0$), så ved derivasjonstesten ("korollar I" av sekantsetningen) er f strengt avtagende på $[-2, -1]$ [10] og derfor har f maksimalt ett nullpunkt på $(-2, -1)$. Tilsammen altså nøyaktig ett nullpunkt.

Tangenten til en graf $y = f(x)$ i et punkt $(a, f(a))$ er
$$y - f(a) = f'(a)(x - a);$$
i vårt tilfelle $y - 13 = -31(x + 2)$. Skjæringen x_1 med x-aksen gis ved å sette $y = 0$ og løse for x: $x = \frac{-13}{-31} - 2 = -\frac{49}{31}$.

Newton-Raphson's metode består nettopp i å finne skjæringen mellom tangenten og x-aksen, så tilnærmingen til nullpunktet b vi får gjennom å anvende Newton-Raphsons metode en gang med startverdi $x_0 = -2$ er derfor $x_1 = -\frac{49}{31}$.

(b) Som vi har sett er $f'(x) = 4x^3 + 1$ og funksjonen strengt avtagende på $(-2, -1)$. Videre er $f''(x) = 12x^2$ så grafen krummer oppover på $(-2, -1)$. Om $-2 \leq a < b$ ligger derfor tangenten til f gjennom $(a, f(a))$ *under* grafen og skjærer x-aksen i et punkt c hvor $a < c$ (fordi $f(a) > 0$ og $f'(a) < 0$) og $c < b$ (fordi grafen krummer oppover). Newton-Raphsons metode med $x_0 = -2$ gir derfor en følge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ hvor (ved induksjon) $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < b$.

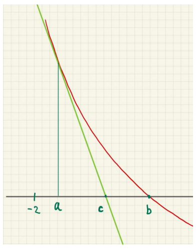
Om vi vil gjøre det formelt med symbolmanipulering kan det se slik ut: for hvert naturlig tall n la $P(n)$ være utsagnet "$-2 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$". Vår oppgave

---

[8] noen har droppet z fullstendig og i stedet for "$z'(0) = 50$" har satt "$y'(0) = 50$" uten begrunnelse. Det gir ikke full uttelling (selv om det gir "rett svar").

[9] Til de som bekymrer seg over benevning må man være klar over at en ligning som $x(t)^3 + y(t)^3 = 9x(t)y(t) + 1$ avhenger av benevningen – den stakkars 1'eren til slutt må f.eks. være "1 km^3" og 9'eren er i all hemmelighet "9 km".

[10] mange måter å finne ut at funksjonen er strengt avtagende på $[-2, -1]$, men noe av det som ble presentert var ikke overbevisende. F.eks. sa noen "$f'(-2) < 0$ og $f'(-1) < 0$, så ..." og andre "$f(-2) > f(-1)$, så ..."



er å vise $P(n)$ for alle naturlige tall n og et induksjonsbevis vil da involvere å vise $P(0)$ og at for ethvert naturlig tall k har vi $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Utsagnet $P(0)$ er kort og greit $-2 < b$, som vi jo alt har vist, så det gjenstår å vise at gitt et naturlig tall k, så har vi at hvis $P(k)$ er sann, så er også $P(k+1)$ sann.

Så vi antar $-2 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < b$ og det eneste vi trenger å etablere er at da er $x_k < x_{k+1}$ og $x_{k+1} < b$.

– Da f er strengt avtagende på $(-2,-1)$ og $x_k < b$ så er $f(x_k) > 0$ og $f'(x_k) < 0$ og dermed har vi $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} > x_k$.
– Envidere har vi ved Taylors formel at

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{f''(s)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2/2 = 0 + \frac{f''(s)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2$$

for en $s \in (x_k, x_{k+1})$. Siden $f''(s) = 12s^2 > 0$ har vi at $f(x_{k+1}) > 0 = f(b)$ som (siden f er strengt avtagende) betyr at $x_{k+1} < b$.

OPPGAVE 7

(a) For en s mellom 0 og x har vi at Taylors formel er

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(x)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(s)}{24}x^4 \\ &= \cos(0) - \sin(0)x + \frac{-\cos(0)}{2}x^2 + \frac{\sin(0)}{6}x^3 + \frac{\cos(s)}{24}x^4 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(s)}{24}x^4. \end{aligned}$$

(b) Funksjonen $f(x) = \cos x$ er strengt avtagende på $[0, \pi]$. Så om $x \in (0, 1/4]$ og $s \in (0, x)$ har vi at $\cos\frac{1}{4} < \cos s < \cos(0) = 1$. Derfor er $E_3(x) = \frac{\cos(s)}{24}x^4$ i intervallet $(\frac{\cos\frac{1}{4}}{24}x^4, \frac{1}{24}x^4)$ som vi skulle vise.

Derfor er (ingen faktorer er negative og integrasjon bevarer ulikheter, så retningen av ulikhetene blir bevart)

$$\int_0^{1/4} \sqrt{x}\frac{\cos\frac{1}{4}}{24}x^4\,dx < \int_0^{1/4} \sqrt{x}E_3(x)\,dx < \int_0^{1/4} \sqrt{x}\frac{1}{24}x^4\,dx.$$

Siden $\int_0^{1/4} \sqrt{x}\,x^4\,dx = \frac{2}{11}[x^{11/2}]_0^{1/4} = \frac{2}{11}\frac{1}{2^{11}}$ får vi at

$$\frac{\cos\frac{1}{4}}{24}\frac{2}{11}\frac{1}{2^{11}} < \int_0^{1/4} \sqrt{x}E_3(x)\,dx < \frac{1}{24}\frac{2}{11}\frac{1}{2^{11}}.$$

OPPGAVE 8

(a) Initialverdiproblemet

$$y'(t) = ke^{at}y(t)(P - y(t)), \quad y(0) = P/10$$

angripes på standard måte. Ingen av de konstante løsningene hvor enten ingen er smittet eller hele befolkningen er smittet passer intialverdien $y(0) = P/10$ [11] så vi deler begge sider av ligningen på $y(t)(P - y(t))$ og integrerer mhp. t fra $t = 0$ til $t = T$: [12]

$$\int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)(P - y(t))} dt = \int_0^T ke^{at} dt.$$

Høyre siden er

$$R(T) := k \int_0^T e^{at} dt = k[\frac{1}{a} e^{at}]_0^T = \frac{k}{a}(e^{aT} - 1)$$

mens venstre siden angripes som sedvanlig med substitusjonen $u = y(t)$ og delbrøksoppspalting, noe som skulle resultere i

$$\frac{1}{P} \ln \left| \frac{9y(T)}{P - y(T)} \right|.$$

Når vi så løser for $y(T)$ får vi efter litt strev (skriv ut mellomregning eller gjør kontrollen i fotnoten [13] i all detalj)

$$y(T) = \frac{P}{1 + 9e^{-P \cdot R(T)}}$$

(hvor $R(T)$ står skrevet ut litt over).

(b) Merk at $\lim_{T\to\infty} R(T) = -\frac{k}{a}$ (her brukes at $a < 0$), så ved kontinuitet er

$$L = \lim_{T\to\infty} y(T) = \frac{P}{1 + 9e^{-P \cdot \lim_{T\to\infty} R(T)}} = \frac{P}{1 + 9e^{\frac{kP}{a}}}.$$

Forutsatt at kP er positiv (som jo er det eneste som gir mening gitt at det snakkes om smitte[14]) har vi: Når $|a|$ er svært liten er L nær

$$\lim_{a\to 0^-} \frac{P}{1 + 9e^{\frac{kP}{a}}} = \frac{P}{1 + 9 \cdot 0} = P$$

(fordi $\lim_{a\to 0^-} e^{\frac{kP}{a}} = 0$), mens når $|a|$ er svært stor er L nær

$$\lim_{a\to -\infty} \frac{P}{1 + 9e^{\frac{kP}{a}}} = \frac{P}{1 + 9 \cdot 1} = P/10$$

(fordi $\lim_{a\to -\infty} e^{\frac{kP}{a}} = 1$).

---

[11] med mindre $P = 0$, men i det tilfellet er der ingen folk å smitte, og det er det.

[12] helt greit (men litt mer tungvindt) å bruke ubestemte integraler og så finne integrasjonskonstanten ved innsetting

[13] Her er en liten kontrollregning på sin plass: $y(0) = \frac{P}{1+9e^{-P \cdot R(0)}} = P/10$ og

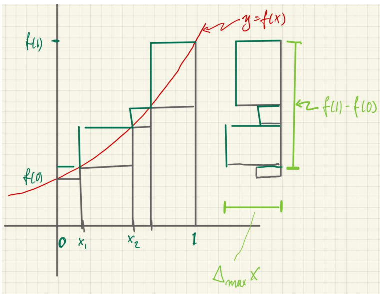
$$y'(t) = P \cdot (-(1+9e^{-P \cdot R(t)})^{-2}) \cdot (0+9 \cdot e^{-P \cdot R(t)} \cdot (-P \cdot R'(t))) = R'(t) \cdot \frac{P}{1 + 9e^{-P \cdot R(T)}} \left(P - \frac{P}{1 + 9e^{-P \cdot R(T)}} \right),$$

som jo er akkurat det vi vil ha da $R'(t) = ke^{at}$ ved fundamentalteoremet. Husk at denne sjekken er bevis for at dere har rett resultat, så dersom dere gjør den kan alt det gale dere gjør for å finne y tilgis!

Smitteanimasjonen jeg viste første time i semesteret for å illustrere hva MAT111 kan brukes til hadde både sesongvariasjon og "politisk spake" a, og løses på akkurat samme måte – bortsett fra at integralet $R(T) = k \int_0^T e^{at}(1 + \cos(\frac{\pi}{6}t))\, dt$ er litt vanskeligere.

[14] men for de virkelighetsfjerne blant oss: om $kP = 0$ er $L = P/10$; om $kP < 0$ og $|a|$ liten (hhv. stor) er L nær 0 (hhv. $P/10$)

OPPGAVE 9



Siden f er voksende er nedre (Riemann)sum lik venstre endepunktssum,

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}),$$

mens øvre sum er høyre endepunktssum,

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Følgelig er

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

som er mindre eller lik $\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta_{\max}x = (f(1) - f(0))\Delta_{\max}x$.[15]

Dette løsningsforslaget et "skutt fra hoften" (dvs. skrevet rett inn uten bekymring, kladdepapir eller kontrollregning og uten å se på mine notater fra da jeg designet oppgavene) for å se at det syntes overkommelig å gjøre det i full fart, og vil sikkert inneholde rusk og rask. Vær grei å si fra om du ser noe rart, og så skal jeg rette det opp.

Takk for i år! BID

[15] Ved kompletthet av de reelle tall vil både følgen av nedre og av øvre summer (vi får ved å forfine partisjonen slik at normen går mot null) konvergere. Fra det over får vi at forfininger av partisjonen vil gi øvre og nedre summer som kommer nærmere og nærmere (fordi normen $\Delta_{\max}x$ skal gå mot null) og dermed har felles grense, hvilket vil si at f er integrerbar på $[0,1]$. I forelesningen snakket jeg ofte om om regulær partisjon og da er jo bredden til alle delintervaller like og $\Delta_{\max}x = \frac{1-0}{n}$, men det er ikke noe krav.