BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag til eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I

Onsdag 13. mai 2020, kl. 09–14.

OPPGAVE 1

(a) Sant

(b) 5

(c) 0

(d) $\frac{i}{\sqrt{3}}$ og $\frac{-i}{\sqrt{3}}$

(e) $b = a$

Oppgave 2

Finn alle komplekse tall z som oppfyller ligningen

$$z^3 + 27 - 27i = 0.$$

Løsning:

$$z^3 + 27 - 27i = 0 \implies z = 3(i-1)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ved å bruke D'Moivres regel får vi de tre røttene

$$z_1 = 3 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$z_2 = 3 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_3 = 3 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) \right).$$

OPPGAVE 3

Bruk den formelle definisjonen av grenseverdi ("$\epsilon - \delta$-definisjonen") til å vise at

$$\lim_{x \to 4} \left(x^3 - 8x^2 + 16x + 4\right) = 4.$$

Løsning: Gitt $\varepsilon > 0$ velg $\delta = \min\{1, \sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\}$. Vi har da at

$$|x-4| < \delta \leq 1 \implies 3 < x < 5 \implies |x| < 5,$$

og

$$|x^3 - 8x^2 + 16x + 4 - 4| = |x||x^2 - 8x + 16| = |x||x-4|^2 < 5\delta^2 \leq 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

OPPGAVE 4

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. La

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{hvis } x \neq 0 \\ f(0) & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

(a) Avgjør om g er kontinuerlig.
(b) Vis at hvis f er voksende, så vil $g(x) \leq f(x)$ for alle $x \geq 0$.

Løsning:

(a) Fra kalkylens fundamentalteorem (Teorem 5.5) har vi at $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ er deriverbar (og derfor også kontinuerlig) da f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$. Teorem 2.6 i læreboken sier videre at kvotienter av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige, derfor vil $\frac{F(x)}{x}$ være kontinuerlig når $x \neq 0$. Altså er $g(x)$ kontinuerlig for $x \neq 0$. Videre kan vi teste om $g(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ ved å sjekke om $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = f(0)$. Vi regner grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0),$$

der den andre likheten er l'Hôpitals regel, som kan anvendes fordi $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to 0} x = 0$ og $\int_0^x f(t)dt$ og x er deriverbare funksjoner, og den tredje likheten kommer fra kalkylens fundamentalteorem. Vi har altså at $g(x)$ er kontinuerlig også i $x = 0$.

(b) Fra monotonisitet av bestemte integraler (Teorem 5.3) har vi

$$\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x f(x)dt = xf(x)$$

fordi $f(x) \geq f(t)$ for $t \in [0, x]$ (f er en voksende funksjon). Vi har derfor, for $x > 0$,

$$g(x) = \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} \leq \frac{xf(x)}{x} = f(x).$$

For $x = 0$ har vi $g(0) = f(0)$, og vi har da $g(x) \leq f(x)$ for $x \geq 0$.

Oppgave 5

Betrakt funksjonen

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2.$$

(a) Finn det største intervallet som inneholder $x = 1$ hvor $f(x)$ er inverterbar.
(b) Vis at dette intervallet også inneholder et nullpunkt for funksjonen.

Vi ønsker nå å finne dette nullpunktet ved hjelp av Newtons metode.

(c) Lag en skisse av funksjonen $f(x)$ på intervallet $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ og bruk den til å forklare hvorfor $x_0 = \frac{3}{2}$ er en egnet startverdi for Newtons metode.
Hint: Betrakt krumningen og stigningen til funksjonen, og skisser hvordan Newtons metode finner nullpunkter.
(d) Utfør ett steg av Newton's metode.

Løsning:

(a) En funksjon er inverterbar på et intervall hvis og bare hvis den er injektiv (en-til-en) på det samme intervallet. Dersom en funksjon er strengt avtagende/voksende er den injektiv. Vi ser derfor på den deriverte:

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = x(x-3)(x+1).$$

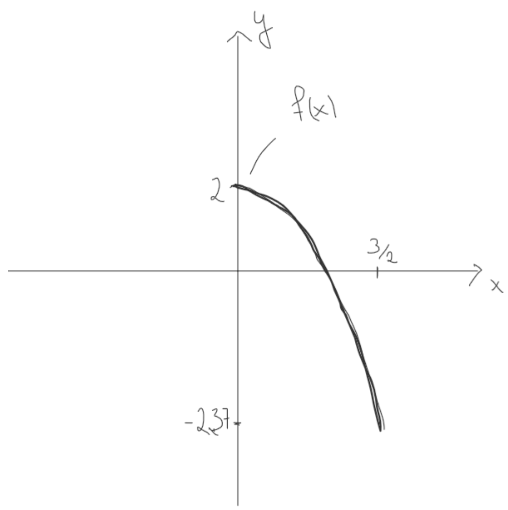
Ved å for eksempel tegne et fortegnsskjema kan man se at $f(x)$ er strengt avtagende i intervallet $[0,3]$. Da dette intervallet inneholder $x = 1$, og funksjonen stiger for både større, og mindre x-verdier (sett fra fortegnsskjema) konkluderer vi med at $[0,3]$ er det riktige intervallet.

(b) Da funksjonen er et polynom er den kontinuerlig og vi kan bruke skjæringssetningen. Vi regner $f(0) = 2$ og $f(3) = -\frac{37}{4}$ og konkluderer fra skjæringssetningen at funksjonen også må innta verdien 0 på intervallet.

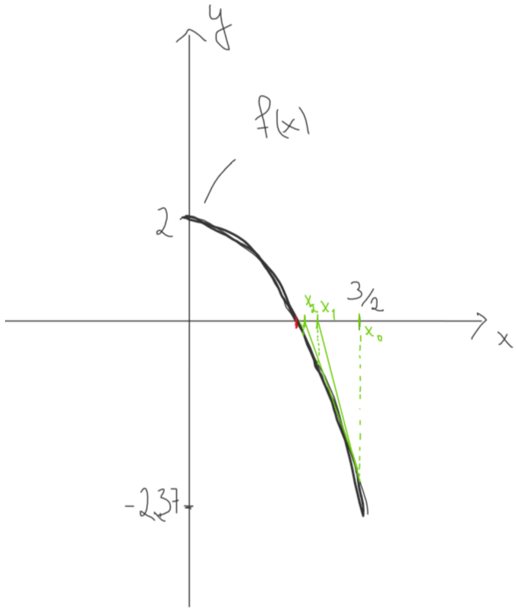
(c) Vi vet at funksjonen er avtagende på intervallet $[0,3]$. Vi ser også at $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2,36 < 0$, da vet vi at nullpunktet må ligge i intervallet $(0, \frac{3}{2})$. Vi sjekker krumningen til $f(x)$:

$$f''(x) = 3\left(x - \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)\left(x - \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right) < 0$$

for $x \in \left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$. Intervallet $\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$ inneholder $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ og vi ser at vi har en konkav funksjon. En grov skisse er gitt i figuren:



Newtons metode finner nullpunkter ved hjelp av tangenter, som vist her:



Vi ser at dersom vi starter i $x_0 = \frac{3}{2}$ så kommer Newtons metode til å finne verdier som stadig går nærmere nullpunktet. Newtons metode konvergerer.

(d)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{3}{2} - \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} \approx 1{,}08.$$

OPPGAVE 6

(a) Beskriv kort trapesregelen, som brukes for å finne tilnærmet verdi til et bestemt integral.
(b) Beskriv kort Simpsons metode for å finne tilnærmet verdi til et bestemt integral.
(c) Er det alltid bedre å bruke Simpsons metode enn trapesregelen? Forklar.

Løsning:

(a) **Trapesregelen** er en metode for å finne tilnærminger til integraler der man stykker opp integrasjonsområdet (lager en partisjon). Man tilnærmer så arealet mellom grafen til funksjonen og x-aksen på delintervallene. Det gjør man ved å regne arealet til et trapes som har hjørner i endepunktene på delintervallene og i grafen til funksjonen i endepunktene på delintervallene. Den totale tilnærmingen vil være summen av arealene til alle trapesene.
(b) **Simpsons metode** er også en metode for å finne tilnærminger til integraler der man stykker opp integrasjonsområdet (lager en partisjon). Her er det viktig at man har et partall antall delintervaller. Man tar så to og to etterfølgende delintervaller og lager et andregradspolynom om går gjennom endepunktene på de to intervallene, og funksjonsverdiene i de respektive punktene. Så regner man integralet til dette andregradspolynomet på de to delintervallene. Når man har gjort dette på alle delintervallene summerer man alle integralene og får den totale tilnærmingen.
(c) Stort sett er det riktig at Simpsons metode er mer nøyaktig enn trapesmetoden (se Teorem 4 og 5 i kapittel 6.6 og 6.7 læreboken), men det finnes mange funksjoner og partisjoner hvor trapesmetoden gjør bedre tilnærminger enn Simpsons metode. Ta for eksempel funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad x \in [0,1] \\ 2-x & \text{for} \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

med partisjonen $\{0,1,2\}$. Her gir trapesregelen nøyaktig svar på integralet, men ikke Simpsons metode.

OPPGAVE 7

Betrakt kurven $x = y(h-y)e^{0{,}5y}$ for $0 \le y \le h$, der $h > 0$ er en parameter. Når denne kurven roteres om y-aksen gir den skallet til en ballong med høyde h.

(a) La $h = 1$. Finn en tilnærming til ballongens volum ved å bruke trapesregelen på en uniform partisjon av intervalet $[0, 1]$ med 4 delintervaler.

(b) Vi blåser opp ballongen med en hastighet på 0,02 liter per sekund. Hvor fort øker ballongens høyde når $h = 0{,}5$? (Du kan bruke at $\int_0^{0{,}5} y^2 e^y \, dy \approx 0{,}06$ og $\int_0^{0{,}5} y^3 e^y \, dy \approx 0{,}02$.)

Løsning:

(a) En partisjon av intervallet [0.1] med 4 delintervaller består av x-verdiene $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. Integralet vi skal tilnærme er

$$\pi \int_0^1 y^2(y-1)^2 e^y \, dy$$

og tilnærmingen med trapesregelen blir:

$$\pi \int_0^1 y^2(y-1)^2 e^y \, dy \approx$$

$$\pi \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 e^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^2 e^{\frac{3}{4}}\right] \approx 0{,}175.$$

(b) Ballongens volum ved høyde h er gitt ved

$$V(h) = \pi \int_0^h y^2(y-h)^2 e^y \, dy$$

$$= \pi \left(\int_0^h y^4 e^y \, dx - 2h \int_0^h y^3 e^y \, dy + h^2 \int_0^h y^2 e^y \, dy. \right)$$

Vi fyller ballongen med en hastighet på $\frac{dV}{dt} = 0{,}02$ l/s og vil finne $\frac{dh}{dt}$. Ved kjerneregelen har vi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} \implies \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} / \frac{dV}{dh} = 0{,}02 / \frac{dV}{dh}.$$

Vi finner $\frac{dV}{dh}$ ved hjelp av kalkylens fundamentalteorem og produktregelen:

$$\frac{dV}{dh} = \pi \left(h^4 e^h - 2h^4 e^h - 2\int_0^h y^3 e^y \, dy + 2h \int_0^h y^2 e^y \, dy + h^4 e^h \right).$$

Setter vi inn for $h = 0{,}5$ får vi $\frac{dV}{dh} \approx 0{,}02\pi$ og dermed $\frac{dh}{dt} \approx \frac{0{,}02}{0{,}02\pi} = \frac{1}{\pi}$ dm/s.

OPPGAVE 8

Løsning:

(a) Sant
(b) Usant
(c) Sant
(d) $\sin(x)$
(e) $1 + 2x + 2x^2$

OPPGAVE 9

I et fiktivt land, hvor det bor 10 millioner innbyggere, er et virus på avveie. Landet bestemmer seg for å ikke sette i gang tiltak for å begrense smittespredningen. Vi antar at vi følger en logistisk vekstmodell og beskriver derfor antallet smittede y ved tiden t gjennom differensialligningen

$$y'(t) = ay(K - y).$$

Anta at når 70 % av befolkningen er smittet, så vil ikke viruset klare å spre seg mer. Ved tiden $t = 0$ dager er det 5 smittede i landet og etter 30 dager er det 5000 smittede.

(a) Løs ligningen og finn et uttrykk for $y(t)$.

(b) Hvor lang tid tar det før 69 % av befolkningen er smittet om vi følger vår modell?

Løsning:

(a) Vi har en separabel differensialligning og kan derfor løse ligningen med separering av variablene:

$$\int \frac{1}{(K-y)y}\,dy = \frac{1}{K}\int \frac{1}{K-y} + \frac{1}{y}\,dy = \int a\,dt$$

$$\implies \ln\left(\frac{y}{K-y}\right) = Kat + C_1 \implies \frac{y}{K-y} = C_2 e^{Kat}$$

$$\implies y = \frac{K}{1 + Ce^{-Kat}}.$$

Vi brukte her at $y \in (0, K)$. Da smitten stopper når vi har nådd 70 % av befolkningen må $K = 7$ millioner. Vi finner så C og a ved å bruke informasjonen $y(0) = 5$ og $y(30) = 5000$:

$$5 = y(0) = \frac{K}{1+C} \implies C = \frac{K-5}{5} = 1399999,$$

og

$$5000 = y(30) = \frac{K}{1 + Ce^{-30Ka}} \implies a = \frac{\ln\left(\frac{K-5000}{5000C}\right)}{-30K} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-8}.$$

Altså har vi

$$y(t) \approx \frac{7 \cdot 10^6}{1 + 1399999e^{-0{,}23t}}.$$

(b) Vi har at 69 % av befolkningen er smittet når

$$y(t) = \frac{7 \cdot 10^6}{1 + 1399999e^{-0{,}23t}} = 0{,}69 \cdot 10^7 \implies t \approx 79.9.$$

Altså vil 69 % av befolkningen være smittet etter ca 80 dager.

Erlend Storvik Per Manne