

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

28. September 2016, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt

$$\begin{array}{rclcl} & + x_2 & - x_3 & = & 2 \\ x_1 & + x_2 & & = & 3 \\ x_1 & - x_2 & + (a+1)x_3 & = & -1 \\ & & bx_3 & = & 0. \end{array}$$

1. For hvilke verdier av a og b har ligningssystemet: (i) ingen løsning? (ii) uendelig mange løsninger? (iii) én løsning?
2. Regn ut løsningen av systemet for $a = 1$ og $b = 0$.
3. La A være koeffisientmatrisen til ligningssystemet over. Finn en basis for $\text{Nul } A$ og $\text{Col } A$ når $a = 1$ og $b = 0$.
4. For hvilke verdier av a, b har $\text{Col } A$ dimensjon 3? Hva er rangen til A når $a = 0$?
5. Betrakt den augmentert matrisen B til systemet. Bruk $a = b = 1$ og regn ut $\det B$.

Oppgave 2

Gitt mengden $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

1. Vis at V er et underrom av \mathbb{R}^4 .
2. Vis at mengden

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \right\}$$

er en basis for V . En vektor $\mathbf{v} \in V$ har \mathcal{B} -koordinater $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Hva er \mathbf{v} ? (dvs hva er koordinatene $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ i standardbasisen $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ av \mathbb{R}^4 ?)

3. Gitt basisen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, der

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2,$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_3,$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3,$$

finn basisskiftematriksen $\mathcal{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ fra \mathcal{B} til \mathcal{C} og regn ut $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$.

4. Bruk Gram-Schmidt algoritmen til å ortonormalisere basisen \mathcal{B} .

5. Hva er V^\perp ?

Oppgave 3

Gitt matrisen $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, finn alle egenverdiene og egenvektorene til C . Bestem om matrisen C er diagonaliserbar. I så fall, finn matrisene P og D som diagonaliserer C , dvs slik at $C = PDP^{-1}$.

Oppgave 4

Du har samlet inn data for et eksperiment (se tabellen nedenfor), der du tror at de observerte dataene kan representeres ved en lineær kombinasjon av cosinus bølger. Du setter opp modellen $y(t) = a \cos(\frac{\pi}{4}t) + b \cos(\frac{\pi}{2}t)$, der t er tiden. Observasjonene er tatt ved tiden $t = 0, 1, 2, 3$.

Tid (t)	0	1	2	3
Observerte data (y)	2	1	0	1

1. Vis at funksjonene $\cos(\frac{\pi}{4}t)$ og $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ er lineært uavhengige for $t \in \mathbb{R}$.
2. Finn verdiene av a, b som best matcher observasjonene (minste kvadraters løsning). Bruk modellen til å regne ut $y(t)$ for $t = 4$ (med verdiene av a, b som du fant over).

Oppgave 5

Mengden M_2 av alle 2×2 matriser er et vektorrom: dette kan bevises ved å identifisere matrisen A

med vektoren \mathbf{a} ved å sortere elementene i matrisen etter kolonnene, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}$.

1. Hva er dimensjonen av M_2 som vektorrom? Finn en basis for M_2 og representér basiselementene som 2×2 matriser.
2. Gitt $A \in M_2$, man kan definere $T_A : X \in M_2 \mapsto AX \in M_2$ (standard matriseprodukt). Vis at T_A er en lineær transformasjon. Identifiser M_2 med \mathbb{R}^4 og finn standardmatrisen (den skal være en 4×4 matrise) for transformasjonen.
3. Symmetriske matriser er et underrom S_2 av M_2 . Hva er dimensjonen av S_2 ? Finn en basis for S_2 og representér basiselementene som matriser.
4. Gitt A, B i M_2 , vi definerer et skalarprodukt som $\langle A, B \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$. Finn den ortogonale komplementen S_2^\perp til S_2 . Hva er dimensjonen av S_2^\perp ? Hvordan ser matrisene i S_2^\perp ut?

Antonella Zanna Munthe-Kaas