BOKMÅL

UNIVERSITET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

28. September 2016, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt

$$\begin{array}{rrrcr} & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & +(a+1)x_3 & = & -1 \\ & & bx_3 & = & 0. \end{array}$$

1. For hvilke verdier av a og b har ligningssystemet: (i) ingen løsning? (ii) uendelig mange løsninger? (iii) én løsning?
2. Regn ut løsningen av systemet for $a = 1$ og $b = 0$.
3. La A være koeffisientmatrisen til ligningssystemet over. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ og $\operatorname{Col} A$ når $a = 1$ og $b = 0$.
4. For hvilke verdier av a, b har $\operatorname{Col} A$ dimensjon 3? Hva er rangen til A når $a = 0$?
5. Betrakt den augmentert matrisen B til systemet. Bruk $a = b = 1$ og regn ut $\det B$.

Oppgave 2

Gitt mengden $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

1. Vis at V er et underrom av $\mathbb{R}^4$.
2. Vis at mengden

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for V. En vektor $\mathbf{v} \in V$ har $\mathcal{B}$-koordinater $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Hva er $\mathbf{v}$? (dvs hva er koordinatene $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ i standardbasisen $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ av $\mathbb{R}^4$?)

3. Gitt basisen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, der

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2, \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{c}_3, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \end{aligned}$$

   finn basisskiftematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ og regn ut $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$.

4. Bruk Gram-Schmidt algoritmen til å ortonormalisere basisen $\mathcal{B}$.

5. Hva er $V^{\perp}$?

Oppgave 3

Gitt matrisen $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, finn alle egenverdiene og egenvektorene til C. Bestem om matrisen C er diagonaliserbar. I så fall, finn matrisene P og D som diagonaliserer C, dvs slik at $C = PDP^{-1}$.

Oppgave 4

Du har samlet inn data for et eksperiment (se tabellen nedenfor), der du tror at de observervasjonene kan representeres ved en lineær kombinasjon av cosinus bølger. Du setter opp modellen $y(t) = a\cos(\frac{\pi}{4}t) + b\cos(\frac{\pi}{2}t)$, der t er tiden. Observasjonene er tatt ved tiden $t = 0, 1, 2, 3$.

Tid (t)	0	1	2	3
Observert data (y)	2	1	0	1

1. Vis at funksjonene $\cos(\frac{\pi}{4}t)$ og $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ er lineært uavhengige for $t \in \mathbb{R}$.

2. Finn verdiene av a, b som best matcher observasjonene (minste kvadraters løsning). Bruk modellen til å regne ut $y(t)$ for $t = 4$ (med verdiene av a, b som du fant over).

Oppgave 5

Mengden M_2 av alle 2×2 matriser er et vektorrom: dette kan bevises ved å identifisere matrisen A med vektoren $\mathbf{a}$ ved å sortere elementene i matrisen etter kolonnene, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}$.

1. Hva er dimensjonen av M_2 som vektorrom? Finn en basis for M_2 og representér basiselementene som 2×2 matriser.

2. Gitt $A \in M_2$, man kan definere $T_A : X \in M_2 \mapsto AX \in M_2$ (standard matriseprodukt). Vis at T_A er en lineær transformasjon. Identifisér M_2 med $\mathbb{R}^4$ og finn standardmatrisen (den skal være en 4×4 matrise) for transformasjonen.

3. Symmetriske matriser er et underrom S_2 av M_2. Hva er dimensjonen av S_2? Finn en basis for S_2 og representér basiselementene som matriser.

4. Gitt A, B i M_2, vi definerer et skalarprodukt som $\langle A, B\rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$. Finn den ortogonale komplementen $S_2^{\perp}$ til S_2. Hva er dimensjonen av $S_2^{\perp}$? Hvordan ser matrisene i $S_2^{\perp}$ ut?

Antonella Zanna Munthe-Kaas

Fasit - MAT 121 - H2016

1 Rekkerreduserer den augmentert matrise:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & a+1 & -4 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$R_3 \to R_3 + 2R_2$

1.1 Vi ser at hvis $a-1 \neq 0$ eller $b \neq 0$ da har koeff. matrisen 3 pivot kolonner $\Rightarrow$ entydig løsning.

Om $a-1=0$ og $b=0$, de siste to ligninger er $0=0$ som er alltid tilfredstilt. Koeff. matrisen har 2 pivot kolonner (1 fri variabel), dermed systemet har ∞-mange løsninger.

Systemet har aldri ingen løsning.

Oppsummering:

i) Ingen løsning: <u>aldri</u>

ii) Uendelig mange løsninger: <u>$a=1$ og $b=0$</u>

iii) Én løsning: <u>$a \neq 1$ eller $b \neq 0$</u>

1.2 Løser systemet for $a=1$, $b=0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

x_3 fri variabel

x_1, x_2 ledende variabler.

Eq.2: $x_2 - x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + x_3$

Eq.1: $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - x_2 = 3 - 2 - x_3 = 1 - x_3$

Generelle løsning: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x_3 \\ 2+x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{spesiell løsning}} + \underbrace{x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{homogen løsning}}$

(1.3) Setter $a=1,\ b=0$.

$\mathrm{Nul}\,A = \{ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{0} \}$ (homogen system)

Basis for Nul A : $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (Se 1.2). Dim Nul A = 1 (1 fri variabel)

Col A består av alle mulige lineære Komb. av kolonnene til A.
En basis for Col A består av pivot kolonnene av selve A matrisen (ikke rekkeredusert)

Basis for Col A : $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (Kol. 1 og 2 av A)

Dim Col A = 2.

(1.4) Dim Col A = 3 når alle kolonnene er pivot kolonner. Dette skjer dersom $a \neq 1$ eller $b \neq 0$ (se svar på oppg 1.1)

Rank A = Dim Col A. Hvis $a=0$ da er $a \neq 1$ dermed rank A = 3.

(1.5) $a=b=1$.

utv. mht R1

$$\det B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i=4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & j=3 & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \sim (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \left((-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = \underline{\underline{0}}$$

(Når $a=b=1$, da er $R_3 = R_2 - 2R_1$, dermed rekkevektorene $R_1, R_2\, R_3$ er lin. avhengige og determinanten er 0.)

2.1 $V = \{ \underline{x} \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

Om vi introduserer vektoren $\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, vi kan skrive om:

$V = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{1}^T \underline{x} = 0 \}$

For å vise at V er et underrom av $\mathbb{R}^4$ vi trenger å vise at:

1) $\alpha \in \mathbb{R}, \underline{x} \in V \Rightarrow \alpha \underline{x} \in V$

2) $\underline{x}, \underline{y} \in V \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in V$

1) Anta $\underline{x} \in V$ $(\underline{1}^T \underline{x} = 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\underline{1}^T(\alpha \underline{x}) = \alpha \underbrace{(\underline{1}^T \underline{x})}_{=0 \text{ siden } \underline{x} \in V} = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \underline{x} \in V}}$$

2) Anta $\underline{x}, \underline{y} \in V$ $(\underline{1}^T \underline{x} = \underline{1}^T \underline{y} = 0)$

$$\underline{1}^T(\underline{x} + \underline{y}) = \underbrace{\underline{1}^T \underline{x}}_{=0} + \underbrace{\underline{1}^T \underline{y}}_{=0} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\underline{x} + \underline{y} \in V}}$$

Alternativt, en kan merke at $V = \mathrm{Nul}(A)$ for $A = [1\ 1\ 1\ 1]$.

2.2 Utifra at $V = \mathrm{Nul}(A)$ der $A = [1\ 1\ 1\ 1]$ og rangteoremet

$\dim \mathrm{Nul}\, A + \mathrm{rank}\, A = 4$, der $\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Col}\, A = 1$,

vi har at $\dim \mathrm{Nul}\, A = 4 - 1 = 3$, dermed en basis for V består av 3 lin. uavh. vektorer i V.

Det er opplagt at $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3 \in V$ (det er lett å sjekke at $\underline{1}^T \underline{b}_i = 0$, $i = 1, 2, 3$).

Da er det nok å sjekke at $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ er lin. uavhengige.

Vi ser på den lin. komb: $\alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2 + \gamma \underline{b}_3 = \underline{0}$

ligning 2 medfører at $\alpha = 0$
ligning 3 " " $\beta = 0$
ligning 4 " " $\gamma = 0$.

Dermed $\alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2 + \gamma \underline{b}_3 = \underline{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

og $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ er lin. uavhengige, dermed en basis for V.

QED.

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = 1 \cdot \underline{b}_1 - 3\underline{b}_2 + 2\underline{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

2.3

$\underline{b}_1 = \underline{c}_1 + \underline{c}_2$

$\underline{b}_2 = \underline{c}_3$

$\underline{b}_3 = \underline{c}_2 + \underline{c}_3$

Hvis $\underline{x} = r_1 \underline{b}_1 + r_2 \underline{b}_2 + r_3 \underline{b}_3$, der $[\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$,

Da:

$$[\underline{x}]_{\mathcal{C}} = [r_1 \underline{b}_1 + r_2 \underline{b}_2 + r_3 \underline{b}_3]_{\mathcal{C}} = r_1 [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} + r_2 [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} + r_3 [\underline{b}_3]_{\mathcal{C}} =$$

$$= \underbrace{\big[[\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} \; [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \; [\underline{b}_3]_{\mathcal{C}} \big]}_{\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}} [\underline{x}]_{\mathcal{B}}$$

Siden: $[\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\underline{b}_3]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}} \quad ; \quad [\underline{v}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

2.4 G.S: Starter med ortogonalisering:

$\underline{v}_1 = \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = 2 \quad \underline{b}_2 \cdot \underline{v}_1 = 1$

$\underline{v}_2 = \underline{b}_2 - \frac{\underline{b}_2 \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(Sjekker: $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$ ✓)

$\underline{v}_3 = \underline{b}_3 - \frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} - \frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{v}_2}{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{b}_3 \cdot \underline{v}_1 = 1 \quad ; \quad \underline{b}_3 \cdot \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$

$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$

sjekker: $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 = 0$ ✓ $\quad \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 = 0$ ✓

Normalisering:

$\|\underline{v}_1\| = \sqrt{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1} = \sqrt{2}$

$\|\underline{v}_2\| = \sqrt{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\|\underline{v}_3\| = \sqrt{\underline{v}_3 \cdot \underline{v}_3} = \sqrt{\frac{3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Ortonormal basis:

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3.1 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Egenverdiene er røttene til $\det(C-\lambda I)=0$.

$\underline{\underline{\lambda = 2}}$ (m/ alg. multiplisitet 2)

$\underline{\underline{\lambda = 1}}$ (m/ alg. multiplisitet 1)

Finner egenvektorene.

$\underline{\lambda=2}$: $C - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ x_1 ledende variabel, x_2, x_3 frie.

$x_1 = x_3$

generelle løsning: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

vi har 2 egenvektorer assosiert til $\lambda = 2$:

$\underline{\underline{\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$, $\underline{\underline{\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

$\underline{\lambda=1}$: $C - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ x_1, x_2 ledende var. x_3 fri

$x_2 = x_3$

$x_1 = 0$

generelle løsning: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi har en egenvektor assosiert til $\lambda = 1$:

$\underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Siden matrisen har 3 lin. uavh. egenvektorer, C er diagonaliserbar

Diagonalisering: $C = PDP^{-1}$

$$\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

(4.1) Vi ser på

(*) $\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$ (Konstant funksjon 0 for alle t)

Om uttrykket skal være sant for alle t:

1) ved å ta $t = 1$: $\cos\frac{\pi}{2}t = 0$, $\cos\frac{\pi}{4}t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

2) ved å velge $t = 2$: $\cos\frac{\pi}{4}t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\cos\frac{\pi}{2}t = \cos\pi = -1$

$-\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

dermed de eneste verdier av α, β som gjør (*) sant for alle $t \in \mathbb{R}$ er $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}t$ og $\cos\frac{\pi}{2}t$ er lin. uavh.

(4.2)

t	0	1	2	3
y	2	1	0	1

$y(t) = a\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

$t=0$: $a + b = 2$

$t=1$: $a\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$t=2$: $-b = 0$

$t=3$: $-a\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

minste kvadraters problem.

Finner de normale ligningene: $A^TA\,\underline{x} = A^T\underline{b}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dette gir: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 3 & 2 \end{array}$$

$\underline{\underline{b = \frac{2}{3}}}$; $2a + b = 2 \Rightarrow 2a + \frac{2}{3} = 2$ $a + \frac{1}{3} = 1$ $\underline{\underline{a = \frac{2}{3}}}$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}}$$

$$y(4) = \frac{2}{3}\left(\cos \pi + \cos 2\pi\right) = \frac{2}{3}(-1+1) = 0$$

$\underline{\underline{y(4) = 0}}$ ifølge modellen.

(5.1) Siden M_2 er isomorf til $\mathbb{R}^4$, $\underline{\underline{\dim M_2}} = \dim \mathbb{R}^4 = \underline{\underline{4}}$.

$\mathcal{E} = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4 \}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$

vi kan dermed finne en basis for M_2 ved

å identifisere $\underline{e}_i \to E_i$ (2x2 matriser)

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = e_1 \to E_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \underline{e}_3 \to E_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \underline{e}_2 \to E_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \underline{e}_4 \to E_4 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\{E_1, E_2, E_3, E_4\}}}$ er en basis for M_2.

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = a E_1 + c E_2 + b E_3 + d E_4 .$$

(5.2) $\alpha \in \mathbb{R},\ X \in M_2$: $\quad T_A(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha T_A(X)$

$X, Y \in M_2$: $\quad T_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = T_A(X) + T_A(Y)$

som følger fra egenskapene av matriseprodukt.

Dermed er T_A lineær.

$$A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix}a x_{11} + b x_{21} & a x_{12} + b x_{22}\\ c x_{11} + d x_{21} & c x_{12} + d x_{22}\end{bmatrix}$$

skrevet i vektorform: $\begin{bmatrix}a x_{11} + b x_{21}\\ c x_{11} + d x_{21}\\ a x_{12} + b x_{22}\\ c x_{12} + d x_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & c & d\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}$

Matrisen til T_A, tenkt som en lin. transf. på $\mathbb{R}^4$ er:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$$

5.3 $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \right\}$ (symmetriske matriser)

hvis $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

der $\{E_1, E_2+E_3, E_4\}$ er en basis for S_2.

$\dim S_2 = 3$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ basis.

5.4 Basiselementene E_1, E_2+E_3, E_4 identifiseres med vektorene

$$\underset{\underline{b}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\underline{b}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\underline{b}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

for å finne $S_2^{\perp}$ vi skal finne vektorene $\underline{x}$ som er ortogonale til $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$:

$$\begin{aligned} \underline{b}_1^T \underline{x} &= 0 \\ \underline{b}_2^T \underline{x} &= 0 \\ \underline{b}_3^T \underline{x} &= 0 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser med en gang at $x_1 = x_4 = 0$; Den homogene løsningen

er $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \simeq x_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$S_2^\perp = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ x_3 \text{ hvilkårlig i } \mathbb{R}^3 \right\}$$

$S_2^\perp$ består av <u>skjevsymmetriske matriser.</u>

Den ortogonal dekomposisjonsteoremet

$$\underline{y} = \text{proj}_W y + \text{proj}_{W^\perp} y$$

blir til:

$$A = \underbrace{\text{proj}_{S_2} A}_{\in S_2 \text{ symm. matrise}} + \underbrace{\text{proj}_{S_2^\perp} A}_{\in S_2^\perp,\ \text{skjevsymmetrisk matrise.}}$$

og kan generaliseres til M_n ($n \times n$ matriser).

Med andre ord:

"Enhver $n \times n$ matrise A kan dekomponeres som en sum av en symmetrisk og en skjevsymmetrisk matrise. I tillegg dekomposisjonen er entydig".

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{symm.}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{skjevsymm.}}$$

$\boxed{///}$

Antonella Z. Munthe-Kaas.