UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

30. mai 2016, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & & -x_3 & +(a^2-2)x_4 & = & a^2-2a-1. \end{array}$$

1. For hvilke verdier av a har ligningssystemet: (i) ingen løsning? (ii) uendelig mange løsninger? (iii) én løsning?
2. Regn ut den generelle løsningen av systemet for a som under pkt. (ii).
3. La A være koeffisientmatrisen til ligningssystemet over. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ for a som under pkt. (ii) .
4. For hvilke verdier av a har $\operatorname{Col} A$ dimensjon 3? Hva er rangen til A når $a = 0$?
5. Regn ut determinanten til A når $a^2 = 2$.

Oppgave 2

Bektrakt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

1. Vis at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.
2. Gitt vektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{c}_2 &= -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{c}_3 &= -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3, \end{aligned}$$

finn $\mathcal{B}$-koordinatene til $\mathbf{c}_i$, for $i = 1, 2, 3$.

3. Finn basisskifte matrisen fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$. Gitt en vektor $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$, finn $\mathcal{C}$-koordinatene $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ til $\mathbf{x}$.

4. En lineær transformasjon T er definert som

$$T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \quad T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3, \quad T(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3.$$

   Finn $[T]_{\mathcal{B}}$ (matrisen til transformasjonen relativ til basisen $\mathcal{B}$). Regn ut $T(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$.

5. Bruk Gram-Schmidt algoritmen til å ortonormalisere basisen $\mathcal{B}$.

Oppgave 3

Gitt den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$.

1. Finn en symmetrisk matrise A slik at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

2. Regn ut alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen A.

3. Er A diagonaliserbar? Hvis ja, finn matrisene P, D som diagonaliserer A.

4. Klassifisér formen (om den er positiv (semi-)definert, negativ (semi-)definert, ubestemt) og reduser til standardform (uten kryssledd).

Oppgave 4

For å finne effekten av et legemiddel på pasientenes helse, er et eksperiment med 5 pasienter gjennomført. Effekten av en dose x er målt som $y(x)$ i en skala fra 0 (ingen effekt) til 10 (maks effekt). Se tabellen nedenfor.

Dose (x)	0	1	0	2	4
Effekt (y)	3	5	4	7	6

Bruk en lineær modell, $y(x) = a + bx$, til å finne koeffisientene a, b slik at funksjonen $y(x) = a + bx$ tilpasser best dataene i tabellen (minste kvadraters løsning). Ifølge modellen, hva er doseringen x^* som gir best mulig effekt ($y(x^*) = 10$)?

Oppgave 5

En gitt 2×2 matrise A har egenverdi λ med egenvektor $\mathbf{v}_1$ ($A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$). Egenverdien λ har algebraisk multiplisitet 2 og *geometrisk* multiplisitet 1 (dermed A er *ikke* diagonaliserbar).

1. La $\mathbf{v}_2$ være en løsning til $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$, dvs $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Vis at $(A - \lambda I)^2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

2. Vis at $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$.

3. La $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$. Ved å utnytte at $AV = VT$, finn et uttrykk for T ved å sammenligne kolonnene på begge sider.

4. Det kan vises (du behøver ikke gjøre det) at V er inverterbar, dermed $A = VTV^{-1}$. Matrisen T kalles for *Jordan formen* til matrisen A og $\mathbf{v}_2$ kalles for *generalisert egenvektor* relativ til λ. Finn Jordan formen T og matrisen V for $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Antonella Zanna Munthe-Kaas

Oppgave 1

1.1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a^2-2 & a^2-2a-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a^2-2 & a^2-2a-1 \end{array}\right] \sim$$

$R_2 \to R_2 + R_1$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a^2-2 & a^2-2a-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-3 & a^2-2a-3 \end{array}\right]$$

$R_3 \to 2R_3 + R_2$ $\qquad$ $R_4 \to R_4 - R_3$

$$a^2-2a-3 = (a-3)(a+1)$$

$$a^2-3 = (a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})$$

i) for $a = \pm\sqrt{3}$, siste rekke er $[0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \mid K]$ der $K \neq 0$ dermed systemet har ingen løsning.

ii) systemet har uendelig mange løsninger når $a^2-3=0$ og $a^2-2a-3=0$. Men det finnes ingen verdi av a som tilfredsstiller begge krav. For ingen verdi av a.

ii) systemet har én løsning når $a^2-3 \neq 0$, dvs $a \neq \pm\sqrt{3}$.

1.2 Finnes ikke, siden systemet har aldri uendelig mange løsninger.

1.3 Samme som under pkt 1.2. Evt. man kan svare at $\text{Nul} A = \{0\}$ for $a \neq \pm\sqrt{3}$, mens for $a = \pm\sqrt{3}$, $\text{Nul } A = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Begge svar er akseptable.

(1.4) A har rank 3 (dim Col A = 3) hvis $a^2-3=0$ dvs $\underline{\underline{a=\pm\sqrt{3}}}$

Når $\underline{a=0}$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Alle Kolonner er pivot Kolonner dermed $\underline{\underline{\text{rank } A=4}}$

(1.5) $a^2=2$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\det A}} = \left|\begin{bmatrix} \overset{+}{1} & 1 & 0 & 1 \\ \overset{-}{-1} & 1 & 1 & 0 \\ \overset{+}{1} & 0 & -1 & 1 \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{-1} & 0 \end{bmatrix}\right| = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 + (1+1) = \underline{\underline{1}}$$

N.B. Det var en skrivefeil i teksten som dessverre hverken jeg eller Kontrolløren la merke til. I Koeffisientmatrisen det skulle ha stått $a-2$ ikke a^2-2. Men det er fullt mulig (selv om litt forvirrende) å løse oppgaven som det står, og det er det som studentene fikk beskjed om å forholde seg til under eksamen.

Oppgave 2

2.1 $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Setter $A = [\underline{b}_1 \ \underline{b}_2 \ \underline{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Siden alle Kolonnene er pivot Kolonner, $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ er 3 lin. uavh. vektorer dermed er en basis for $\mathbb{R}^3$.

2.2 $[\underline{c}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\underline{c}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\underline{c}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

2.3 Basisskiftematrisen $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ er definert slik at for alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$,

$[\underline{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [\underline{x}]_{\mathcal{B}}$

hvis $\underline{x} = r_1 \underline{b}_1 + r_2 \underline{b}_2 + r_3 \underline{b}_3$ $\qquad [\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$

dvs: $[\underline{x}]_{\mathcal{C}} = r_1 [\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} + r_2 [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} + r_3 [\underline{b}_3]_{\mathcal{C}}$

$$= \underbrace{\left[[\underline{b}_1]_{\mathcal{C}} \ [\underline{b}_2]_{\mathcal{C}} \ [\underline{b}_3]_{\mathcal{C}} \right]}_{\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}} [\underline{x}]_{\mathcal{B}}$$

dvs vi trenger å regne ut $\mathcal{C}$-Koordinatene til $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$, eller kan man huske at $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}{P}^{-1} = \left[[\underline{c}_1]_{\mathcal{B}} \ [\underline{c}_2]_{\mathcal{B}} \ [\underline{c}_3]_{\mathcal{B}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}} \\ 0 & 0 & +1 & \end{array}\right]$$

Den søkede basisskifte matrise er $\underline{\underline{\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}}$

$\underline{x} = \underline{b}_1 + 2\underline{b}_3 \quad \to \quad [\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

$$[\underline{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}}}$$

Evt. man kan løse oppgaven ved å regne ut $\underline{c}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\underline{c}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\underline{c}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, dvs $\mathcal{C} = \mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, standardbasisen i $\mathbb{R}^3$

Den ønskede basisskiftematrisen er da matrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{E}$

dvs $\left[[\underline{b}_1]_{\mathcal{E}}, [\underline{b}_2]_{\mathcal{E}}, [\underline{b}_3]_{\mathcal{E}}\right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}}}$, som vi fant i std. ✓

3.4 $T(\underline{b}_1) = \underline{b}_1 + \underline{b}_3$; $T(\underline{b}_2) = -\underline{b}_1 + \underline{b}_2 - \underline{b}_3$, $T(\underline{b}_3) = -\underline{b}_1 + \underline{b}_2 - 2\underline{b}_3$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\underline{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; [T(\underline{b}_2)]_{\mathcal{B}} \; [T(\underline{b}_3)]_{\mathcal{B}}\right] =$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}}}$$

$$T(\underline{x}) = T(\underline{b}_1 + 2\underline{b}_3) = T(\underline{b}_1) + 2T(\underline{b}_3) = \underline{b}_1 + \underline{b}_3 - 2\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 - 4\underline{b}_3$$

$$= -\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 - 3\underline{b}_3$$

Dobbeltsjekker:

$[T(\underline{x})]_{\mathcal{B}}, = \begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$

$$[T]_{\mathcal{B}}[\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix} = [T(\underline{x})]_{\mathcal{B}} \quad ✓$$

3.5 Starter med ortogonalisering.

$\underline{v}_1 = \underline{b}_1$

$\underline{v}_2 = \underline{b}_2 \qquad (\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2 = 0)$

$$\underline{v}_3 = \underline{b}_3 - \frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{v}_1}{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1}\underline{v}_1 - \frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{v}_2}{\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2}\underline{v}_2$$

$\underline{b}_3 \cdot \underline{v}_1 = -2$, $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = 3$

$\underline{b}_3 \cdot \underline{v}_2 = 1$, $\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = 2$

$$\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{(+2)}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Normalisering:

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}} \qquad \underline{u}_2 = \frac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}} \qquad \underline{u}_3 = \frac{\underline{v}_3}{\|\underline{v}_3\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 3

3.1 $Q(\underline{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$

Matrisen A slik at $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ er

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

3.2 $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right) =$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

Dermed egenverdiene til A er: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$.

Finner egenvektorene:

$\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri

x_1, x_2 ledende variabler

Den generelle løsning av $(A-\lambda_1 I)\underline{v} = 0$ er dermed

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 3}}$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri

x_1, x_3 ledende v.

$x_3 = 0$

$x_1 = x_2$

Den generelle løsningen av $(A - \lambda_2 I)\underline{v} = 0$ er $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$\underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$:

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri; x_1, x_3 ledende.

$x_3 = 0$, $x_1 = -x_2$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

③.③ Ja, siden A symmetrisk (alle symmetriske matriser er faktisk ortogonalt diagonaliserbare!)

Diagonalisering: $A = PDP^{-1}$ der:

$$\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}}$$

For en ortogonal diagonalisering, man velger $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(QQ^T = I)$ og D som over. Da $A = QDQ^T$.

③.④ Formen er $\underline{\underline{\text{ubestemt}}}$ siden den har både positive og negative egenverdier. F. eks. ved å ta $\underline{x} = \underline{v}_1$: $Q(\underline{v}_1) = \underline{v}_1^T \underbrace{A\underline{v}_1}_{\lambda_1 \underline{v}_1} = \lambda_1 \|\underline{v}_1\|^2 = 1 > 0$

ved å ta $\underline{x} = \underline{v}_3$: $Q(\underline{v}_3) = \underline{v}_3^T A \underline{v}_3 = \lambda_3 \|\underline{v}_3\|^2 = -1 \cdot 2 = -2 < 0$

da formen kan ta både positive og negative verdier da er den er ubestemt.

Standardformen: $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = \underline{\underline{y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2}}$
(uten kryssledd)

(de prinsipale aksene er: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{aksen tilsvarende} \\ \underline{v}_1}}{\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}}$; $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tilsv. } \underline{v}_2}}{\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}}$; $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tilsv. } \underline{v}_3.}}{\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}}$)

Oppg. 4

x	0	1	0	2	4
y	3	5	4	7	6

$y = ax+b$

$$\begin{aligned} 3 &= 0a+b \\ 5 &= 1a+b \\ 4 &= 0a+b \\ 7 &= 2a+b \\ 6 &= 4a+b \end{aligned}$$

Overdeterminert system av 5 lign. i 2 ukjente, a, b.

Systemet løses med minste kvadraters metode.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Normale ligninger:

$$A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+16 & 1+2+4 \\ 1+2+4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14+24 \\ 3+5+4+7+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Vi finner verdien som best passer dataene ved å løse de normale ligningene:

$$\begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 21 & 7 & 43 \\ 7 & 5 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 25 \\ 0 & 8 & 32 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{b = 4}} \qquad a = \frac{25-5\cdot 4}{7} = \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$$

Doseringen som gir mest mulig effekt er slik at

$$\frac{5}{7}x^* + 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x^*}} = \frac{10-4}{\frac{5}{7}} = \frac{6}{5}\cdot 7 = \frac{42}{5} = \underline{\underline{8.4}}$$

Oppgave 5.

(5.1) La $\underline{v_2}$ være en løsning av: $(A-\lambda I)\underline{x} = \underline{v_1}$ dvs. $(A-\lambda I)\underline{v_2} = \underline{v_1}$.

$$(A-\lambda I)^2\underline{v_2} = (A-\lambda I)\underbrace{(A-\lambda I)\underline{v_2}}_{\overset{\shortparallel}{\underline{v_1}}} = (A-\lambda I)\underline{v_1} = \underline{0}$$

siden $\underline{v_1}$ er egenvektor av A relativt til egenverdien λ.

(5.2) $(A-\lambda I)\underline{v_2} = \underline{v_1} \Rightarrow A\underline{v_2} - \lambda\underline{v_2} = \underline{v_1} \Rightarrow A\underline{v_2} = \underline{v_1} + \lambda\underline{v_2}$

(5.3) $V = [\underline{v_1} \ \underline{v_2}]$

$$AV = A[\underline{v_1}, \underline{v_2}] = [A\underline{v_1} \ \ A\underline{v_2}] = [\lambda\underline{v_1} \ \ \underline{v_1}+\lambda\underline{v_2}]$$

$$VT = [\underline{v_1} \ \underline{v_2}]\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = [t_{11}\underline{v_1} + t_{21}\underline{v_2} \qquad t_{12}\underline{v_1} + t_{22}\underline{v_2}]$$

Sammenligner kolonnene:

$$AV = VT \Rightarrow \begin{cases} t_{11}\underline{v_1} + t_{21}\underline{v_2} = \lambda\underline{v_1} \\ t_{12}\underline{v_1} + t_{22}\underline{v_2} = \underline{v_1} + \lambda\underline{v_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{11} = \lambda, \ t_{21} = 0 \\ t_{12} = 1, \ t_{22} = \lambda \end{cases}$$

dermed $\underline{\underline{T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}}$

(5.4) $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad 0 = |C-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1 =$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$$

dermed C har egenverdi $\lambda = 3$ med alg. multiplisitet 2.

$C - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ vi finner kun <u>én</u> egenvektor, $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Det følger at $\lambda = 3$ har geom. mult. 1 og C er ikke diagonaliserbar.

Finner $\underline{v_2}$:

$(A-\lambda I)\underline{x} = \underline{v_1} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad x_2$ fri, $\ x_1 = 1 + x_2$

Som gir den generelle løsningen: $\qquad x_2$ fri, $x_1 = 1+x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan velge en hvilkårlig løsning av systemet over, f. eks, ved å velge $x_2 = 0$:

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dermed $V = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}}$ Jordan form for C

og $C = VTV^{-1}$

Dobbeltsjekker: $V^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = C \quad \checkmark$$

▨

Kommentar: Vi vet at ikke alle matriser er diagonaliserbare, men "nesten". De ikke-diagonaliserbare matriser har alltid en Jordan form som er nesten diagonal. (Jordan formen kan ha maks. en diagonal + øvre diagonal).

Hvis A har egenverdi $\lambda_1 \dots\dots$ med alg. mult. $m_1 \dots\dots m_p$ $\qquad m_1 + \dots\dots + m_p = n$

geom. " $\qquad n_1 \dots\dots n_p$

Den Jordan formen til A er en matrise av type $\begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_p \end{bmatrix}$

⊛ der $T_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}}_{m_i}$ hvis $n_i = m_i$

⊛⊛ $T_i = \left[\begin{array}{ccc|cccc} \lambda_i & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_i & & & & \\ \hline & & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda_i \end{array}\right]$ hvis $n_i < m_i$

$\underbrace{}_{n_i - 1} \; \underbrace{}_{m_i - (n_i - 1)}$

Kalles for Jordan blokk

Tilsvarende: $V = [V_1 \;\; V_2 \cdots V_p]$

der V_i er $n \times m_i$ matriser.

For ⊛: $V_i = [\underline{w}_1 \ldots \underline{w}_{m_i}]$ der $\underline{w}_j$ er egenvektorer assosiert til λ_i,

$1 \le j \le m_i$, og vi vet at vi kan finne m_i slike egenvektorer.

For ⊛⊛: $V_i = [\underbrace{\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_{n_i-1} \mid \underline{v}_{n_i}}_{n_i \text{ egenvektorer}} \;\; \underbrace{\underline{v}_{n_i}^{(2)} \;\; \underline{v}_{n_i}^{(3)} \cdots}_{\text{generaliserte egenvektorer}} \;]$

$$(A - \lambda_i)\underline{v}_{n_i}^{(2)} = \underline{v}_{n_i}$$

$$(A - \lambda_i)\,\underline{v}_{n_i}^{(3)} = \underline{v}_{n_i}^{(2)}$$

osv.

Matrisen V blir da $n \times n$ og er i tillegg invertibar. T er diagonal eller har maks en ekstra øvre-diagonal. ("nesten diagonal").

Man har at $AV = VT \Rightarrow A = VTV^{-1}$.

Bergen, 30.5.2016

Antonella Zanna Munthe-Kaas.