# UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

## Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

29. mai 2017, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
*Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

### Oppgave 1

Gitt

$$\begin{array}{rrrrcl} & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 & = & b. \end{array}$$

1. For hvilke verdier av $a$ og $b$ har ligningssystemet: (i) ingen løsning? (ii) uendelig mange løsninger? (iii) én løsning? [4p]
2. Regn ut den generelle løsning av systemet for $a = 3$ og $b = 4$. [1p]
3. La $A$ være koeffisientmatrisen til ligningssystemet over. Finn en basis for $\operatorname{Nul} A$ når $a = 3$. [1p]
4. For hvilke verdier av $a$ har $\operatorname{Col} A$ dimensjon 3? Finn en basis for $\operatorname{Col} A$ når $a = 0$. [1p]

### Oppgave 2

Gitt mengden $V = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ (underrom av $\mathbb{R}^4$) og vektoren $\mathbf{v}$, der

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Vis at $V$ har dimensjon 3 og finn en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ for $V$. [1p]
2. Bestem om vektoren $\mathbf{v}$ er i $V$. I så fall, finn $\mathcal{B}$-koordinatene $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ til $\mathbf{v}$. [1p]
3. Gitt basisen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, der

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \\ \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{c}_3, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \end{aligned}$$

   finn basisskiftematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ og regn ut $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$. [2p]

4. Betrakt matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hva er sammenhengen mellom matrisen $B$ og basisskiftematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ i forrige deloppgaven? Hvorfor kan man si at det $B \neq 0$ uten å regne ut? [1p]

5. Regn ut determinanten til $B$. [1p]

## Oppgave 3

1. Gitt matrisen $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, bestem om $C$ er diagonaliserbar (evt. ortogonalt diagonaliserbar) eller ikke. Hvis ja, oppgi diagonaliseringen. [6p]

2. Oppgi den kvadratisk formen $Q_C(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C\mathbf{x}$, med $C$ som ovenfor. Finn en diagonalisering av formen (uten kryssledd) og prinsipalaksene. Bestem formen. [2p]

## Oppgave 4

Du har samlet inn eksperimentelle data (se tabellen nedenfor) for en funksjon $y(t) = a + b\sin(\frac{\pi}{2}t) + c\cos(\frac{\pi}{2}t)$, der $t$ er tiden (målt i timer). Ved eksperimentstart (første måling) man setter $t = 0$, deretter måler man $y$ etter $1, 2, 3$ timer.

| Tid ($t$) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Observert data ($y$) | 2 | 1.5 | 0 | -1.5 |

1. Begrunn hvorfor 1, $\sin(\frac{\pi}{2}t)$ og $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ er lineært uavhengige funskjoner for $t \in \mathbb{R}$. Hva sier det om eksistens og entydighet av minste kvadraters løsning av problemet? [1p]

2. Finn normallikningene for problemet. [3p]

3. Finn $a, b, c$ (minste kvadraters løsning). Bruk disse til å regne ut $y(t)$ for $t = 5$. [2p]

## Oppgave 5[1]

En $n \times n$ matrise $S$ sies til å være *skjev-symmetrisk* om $S^T = -S$.

1. Vis at dersom $S$ er skjev-symmetrisk, $\mathbf{x}^T S\mathbf{x} = 0$ for alle vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$. (Hint: transponér).

2. La $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ være gitt og betrakt den lineære transformasjonen $T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definert slik at $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{e_1}) = v_3\mathbf{e_2} - v_2\mathbf{e_3}$, $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{e_2}) = v_1\mathbf{e_3} - v_3\mathbf{e_1}$ og $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{e_3}) = v_2\mathbf{e_1} - v_1\mathbf{e_2}$. Finn standardmatrisen til $T_{\mathbf{v}}$.

3. Transformasjonen $T_{\mathbf{v}}$ ovenfor er $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$ (vektor produkt i $\mathbb{R}^3$). Bruk standardmatrisen til $T_{\mathbf{v}}$ til å vise at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{v} \times \mathbf{x}$ er ortogonale. Vis også at $\mathbf{v} \perp \mathbf{v} \times \mathbf{x}$.

4. Anta at $\mathbf{x}$ er fiksert og at $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ er lineært uavhengige. Hva er $\mathrm{Span}\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}^{\perp}$?

**Antonella Zanna Munthe-Kaas**

[1] Denne oppgave er valgfri