i Introtekst MAT121 V18

Eksam MAT121 - Lineær algebra, V 2018

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.

Svar gjerne med tekst i bokser der det er svarboks og vedlegg ark for mellomregning der det skulle være nødvendig.
Alle svar må begrunnes slik at fremgangsmåten for besvarelsen er tydelig.

Oppgaver 1-6 gir tilsammen 35 poeng som tilsvarer 100% skår.
Bevisoppgave 7 er frivillig og gir ekstra poeng.

1 MAT121V18 Ligningssystemer, eksistens og entydighet

Betrakt ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & a \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -b-2 \end{bmatrix}$$

1. Regn ut trappeformen til den augmentert matrise $[A \mid \mathbf{b}]$ (1p)
2. For hvilke verdier av parametrene a, b har systemet: (3p)

- ingen løsning
- uendelig mange løsninger
- éntydig løsning

3. Finn den generelle løsning av systemet for verdiene av a, b som gir uendelig mange løsninger. (1p)

Skriv ditt svar her eller bruk vedlegg

Format | B I U x_2 x^2 | I_x | | | Ω | ∑ |

Words: 0

Maks poeng: 5

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

2

MAT121V18 Nulrom, Kolonnerom

Matrisen A er det samme som i forrige oppgave:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & a \end{bmatrix}$$

1. For hvilke verdi av a er Nul A et ikke-trivielt underrom av $\mathbb{R}^4$? Finn deretter en basis og oppgi dimensjonen. (2p)
2. Hva er rank A når $a = 4$? Oppgi en basis for kolonnerommet Col A (2p)
3. Regn ut det A når $a = 4$ og $a = 0$ (2p)

Skriv ditt svar her eller bruk vedlegg

Format B I U $\times_2$ $\times^2$ I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 6

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

3 MAt121V18 Transformasjoner og ortogonale komplementer

Betrakt en lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ slik at:

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1. Oppgi standardmatrisen til transformasjonen. (1p)
2. Sammenlign standardmatrisen med matrisene i forrige oppgaver. Er transfomasjon på, én-til-én, både på og én-til-én eller ingen av delene? Forklar. (1p)
3. Betrakt underromet $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid T(\mathbf{x}) = 0\}$. Finn den ortogonale komplementet $W^{\perp}$ (2p).

   Eventuelt, bruk $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. (1p)

Skriv ditt svar her eller bruk vedlegg

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 4

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

4 MAT121V18 Egenverdier, egenvektorer, kvadratiske former

Gitt en vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, vi konstruerer matrisen $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$

1. Uten å regne ut egenverdier og egenvektorer, forklar hvorfor A er ortogonalt diagonaliserbar. (1p)
2. Vis at $\mathbf{u}$ er en egenvektor av A. Hva er egenverdien? (1p)
3. Vis at en hvilkårlig vektor $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ er også egenvektor av A. Hva er egenverdien? (1p)
4. Regn ut alle egenverdier og egenvektorer av A. (3p)
5. Oppgi en ortogonal diagonalisering $A = PDP^T$. (1p)
6. Oppgi en kvadratisk form $Q(\mathbf{x})$ som har matrisen A ovenfor som matrise og oppgi en variabelskifte som transformerer formen til en ny form uten kryssledd. Hva er formen uten kryssledd? (2p)

Skriv ditt svar her

Format

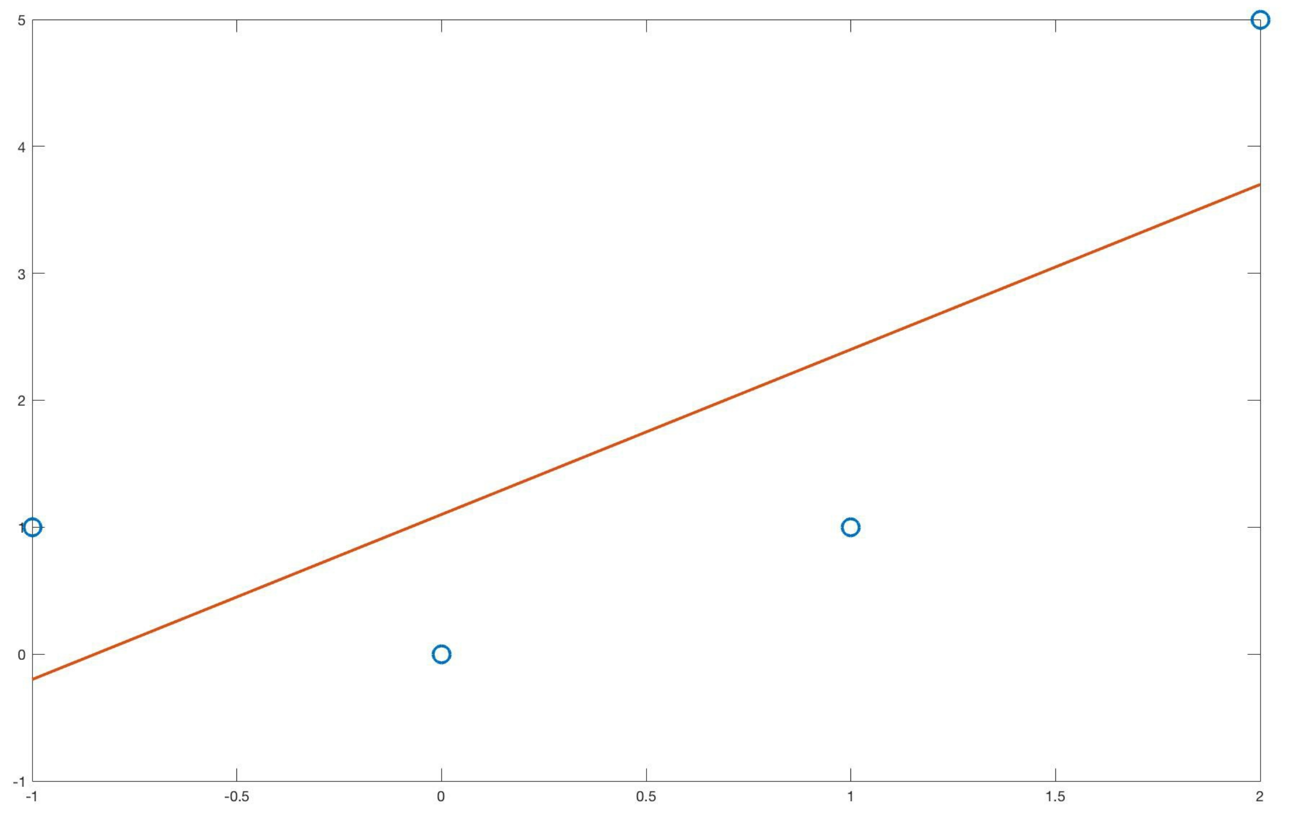
Words: 0

Maks poeng: 9

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

5 MAT121V18 Minste kvardater



1. Finn linjen $y(x) = a + bx$ som best tilpasser punkt i planet med følgende koordinater:

x	y
-1	1
0	0
1	1
2	5

(5p)

2. Bruk linjen du fant til å estimere $y(10)$. (1p)

Skriv ditt svar her

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 6

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

6

MAT121V18 Basis og basissskifte

Betrakt underromet $V \subset \mathbb{R}^4$, $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$, med basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$, der:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Oppgi vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$. (1p)
2. Finn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$-koordinatene til vektoren $\mathbf{x}$). (1p)
3. Gitt en ny basis, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}\}$, der

$$\mathbf{b_1} = \mathbf{c_2} + \mathbf{c_3}$$
$$\mathbf{b_2} = \mathbf{c_2} - \mathbf{c_3}$$
$$\mathbf{b_3} = \mathbf{c_1} - \mathbf{c_2}$$

finn basisskiftmatrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. (2p)

4. Regn ut $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$-koordinatene til vektoren $\mathbf{x}$). (1p)

Skriv ditt svar her

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 5

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

7 Bevisoppgave: Gauss-Legendre

Betrakt vektorrommet $\mathbb{P}_2$ av polynomer av grad høyest 2 i $x \in [0,1]$.

Hvis $p_1(x) \text{ og } p_2(x)$ er to polynomer i $\mathbb{P}_2$, kan man definere skalarproduktet:

(1) $\langle p_1(x), p_2(x) \rangle = \int_0^1 p_1(x) p_2(x) dx$

Siden $\int_0^1 x^{r_1} x^{r_2} dx = \frac{1}{r_1+r_2+1}$, om vi bruker basisen $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, skalarproduktet ovenfor er det samme som:

(2) $\langle p_1(x), p_2(x) \rangle = [p_1]_{\mathcal{B}}^T \, A \, [p_2]_{\mathcal{B}}^T$

der A er en symmetrisk (og positiv definert) matrise.

1. Finn matrisen A
2. Bruk (2) til å regne ut skalarproduktet $\langle 1, x \rangle$ og $\langle 1, -\frac{1}{2} + x \rangle$. Vis dermed at polynomene 1 og x ikke er ortogonale med hensyn til dette skalarproduktet, mens polynomene 1 og $-\frac{1}{2} + x$ er ortogonale.
3. Denne skalarproduktet kan brukes på samme måte som vanlig skalarproduktet til f.eks. ortogonalisering. Bruk den til å ortogonalisere $1, x, x^2$.

Fakta: Polynomene som du finner i oppgaven er kjent som *Gauss-Legendre ortogonale polynomer* mht vektfunskjon $\omega(x) = 1$. Ortogonale polynomer har mange anvendelser. Deres nullpunktene brukes bl.a. for å lage numerisk integrasjonsmetoder, numeriske metoder for diffligninger m.m.

Skriv ditt svar her

Format B I U x_2 x^2 I_x Ω Σ

Words: 0

Maks poeng: 5

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX

8

Delvispoeng fra obligene

Du trenger ikke gjøre noe med denne deloppgave. Dette er laget for å kunne evt. føre resultatene fra obligene i MittUiB i INSPERA systemet.

Maks poeng: 10

Knytte håndtegninger til denne oppgaven?
Bruk følgende kode:

XXXXXXX