

i Eksamen i MAT212 - FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE

Vår 2022

Tillat hjelpemiddel: Ingen, utenom vedlagt formelark.

Eksamenstid er kl. 0900-1400.

Oppgavesettet er sammensatt av ulike type spørsmål som besvares med henholdsvis avkrysning, innsetting av tekst eller lengre utgreiinger. Husk at begrunne svarene dine og vise utregninger på en klar måte. Les spørsmålsformuleringen nøye og se gjerne over alle oppgavene før du disponerer tiden. Flere oppgaver er sammensett av flere enn ett steg/en del.

Oppgavesettet har 11 oppgaver. Den 11. oppgaven gir deg mulighet at komme med utfyllende kommentarer. Totale poengsummen er 100 (oppg. 1-10).

Alle oppgavene kan i utgangspunktet løses digitalt gjennom de svarboksene. Når det gjelder langsvarsoppgaver er det mulig å skrive deler eller hele eksamensbesvarelse på papir ved behov.

Lykke til!

Sæunn Halldorsdottir og Nadia S. Taki

i Formelark fra Adams 9th ed.

- 1 Gitt ligningen $e^{x+y} + e^{x+z} + e^{y+z} = 3$. Vis at for hver av variablene x, y, z så kan du skrive de som en funksjon av de to andre, f. eks. $z = f(x, y)$, nær punktet $(0, 0, 0)$. Finn deretter en ligning for tangentplanet igjennom punktet.

(10

poeng)

Skriv ditt svar her eller bruk ark

Format
|
B
I
U
 x_2
 x^2
 $\frac{1}{x}$
|

|

|
 $\frac{1}{2}$
 $\frac{3}{4}$
|
 Ω

 Σ

✖

Words: 0

Maks poeng: 10

- 2 I denne oppgave betrakter vi planet $3x + 2y + z = 6$ og undersøker den delen som ligger innenfor første oktant i $\mathbb{R}^3$, dvs. hvor $x, y, z \geq 0$. Finn definisjonsområdet (e. domain of a function) for flaten $z = g(x, y)$ i xy planet og deretter beregn arealet til flaten (som ligger innenfor første oktant) ved hjelp av integrasjon.

(10

poeng)

Skriv ditt svar her eller bruk ark

Maks poeng: 10

- 3 Les grundig definisjonene (i)-(iii) og svar på påstandene/spørsmålene nedenfor (1-4). Her får du 2 poeng for hvert riktig svar, -2 poeng for feil svar og 0 poeng for ikke svart, total mulig poengsum 8.

(i) En C^0 vektorfunksjon, $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, der I er et intervall, kalles en sti og verdimengden $\mathbf{r}(I)$ er en kurve i $\mathbb{R}^n$.

(ii) En kurve er glatt hvis tangentvektorens endring er kontinuert.

(iii) Lengden av den glatte kurven er $L = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$.

1. En sti som definerer en glatt kurve er C^1 .

Velg ett alternativ:

- ☐ Sant
- ☐ Usant

2. Lengden L er uavhengig av stien mellom de to endepunktene a og b .

Velg et alternativ

- ☐ Sant
- ☐ Usant

3. Kan man finne lengden av $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (t, y(t))$, når $y(t) = \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) & , t \neq 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$.

Velg et alternativ

- ☐ Ja
- ☐ Nei

4. Er stien i (3) C^1 ?

Velg et alternativ

- ☐ Ja
- ☐ Nei

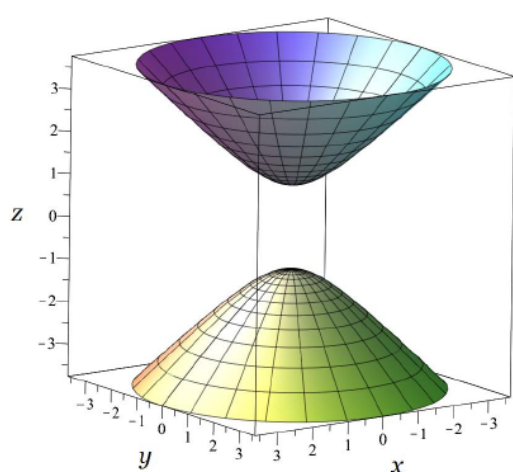
Maks poeng: 8

4 Se på ligningene 1.-4. og par de sammen med bildene I)-IV). (8 poeng)

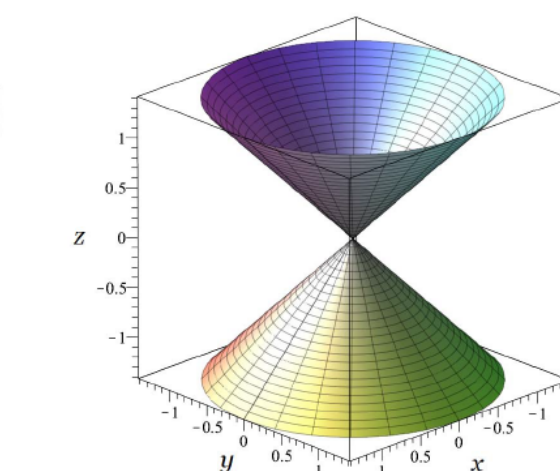
1. $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$
2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
3. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$
4. $4x^2 + y^2 - z = 0$

Finne de som passer sammen:

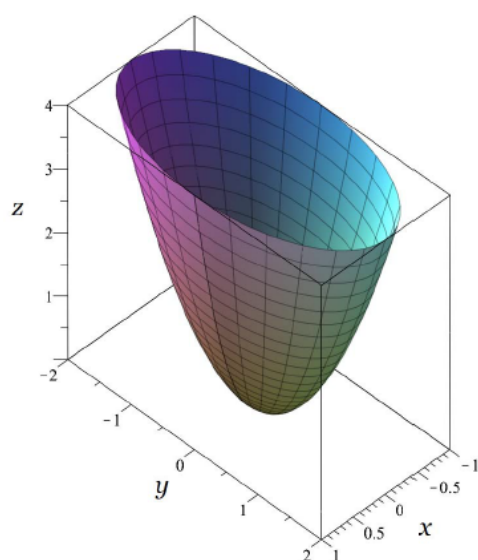
	ligning 1	2	3	4
Bilde I	☐	☐	☐	☐
II	☐	☐	☐	☐
III	☐	☐	☐	☐
IV	☐	☐	☐	☐



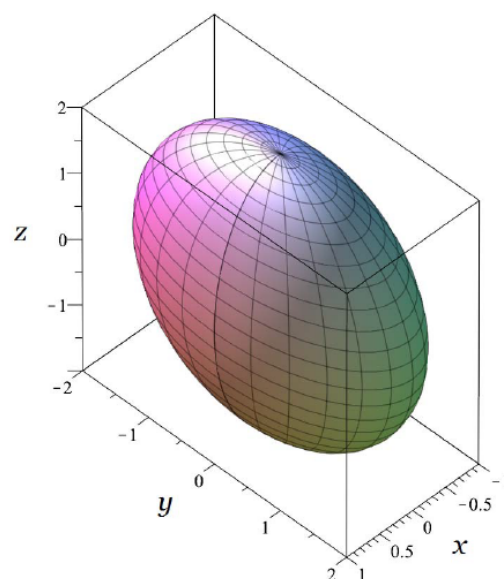
I)



II)

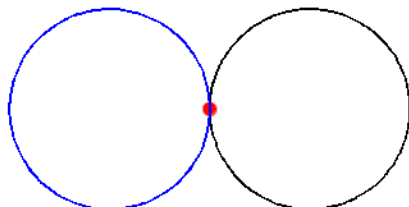


III)



IV)

- 5 Bildet nedenfor viser en kardioid (e. cardioid). Det vil si en kurve som beskrives av en punkt på et dekk (sort sirkel) mens dekket ruller uten å gli rundt en sirkel med samme radius (blå). Dette beskrives best med animasjon (kurven er vist med rødt).



Kilde: By AtomicShoelace - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39636709>

Kurven for kardioider har to mulige parametriseringer som er gitt ved

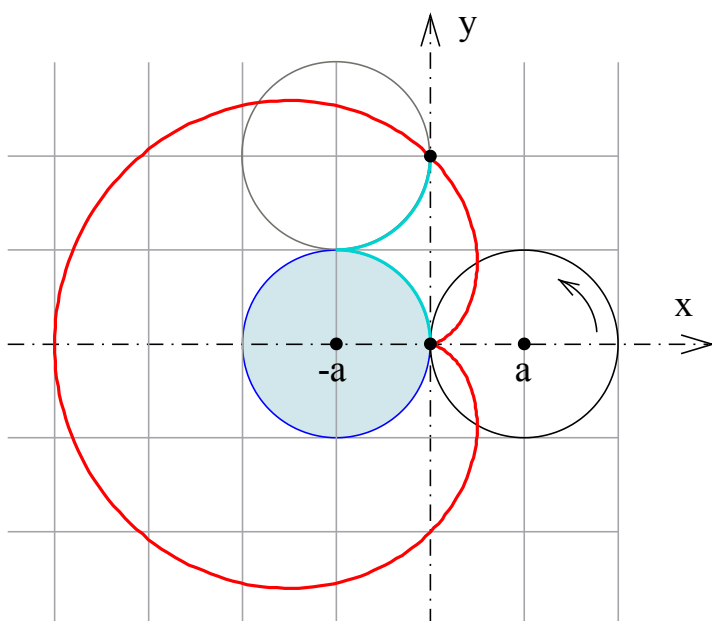
$$\mathbf{r}(\theta) = 2a(1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(t) = (2a \cos t(1 - \cos t), 2a \sin t(1 - \cos t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2)$$

1. Bruk parametrisering (1) og beregn arealet innelukket av kurven ved å løse et flateintegral. Hint: Her kan det være en fordel å bruke $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$.

2. Argumenter hvordan en kan finne arealet innelukket av kurven ved hjelp av Greens teorem for vektorfeltet $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y, x)$ og parametrisering (2). Ved å bruke denne metoden så får du ut et integral som er mulig å løse, men det holder å skrive opp dette integralet.

(10 poeng)



Kilde: By Ag2gaeh - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46189703>

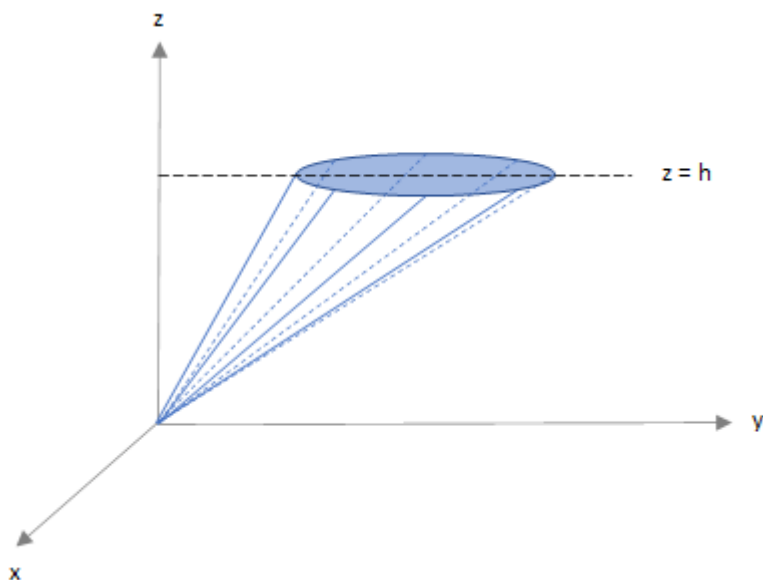
Skriv ditt svar her eller bruk ark

Maks poeng: 10

6 Steg 1 (10 poeng):

Vi vet at volumet av en kjegle er $V = \frac{1}{3}Ah$, hvor A er arealet av bunnen og h er høyden av kjeglen.

Bruk Gauss teorem til at bekrefte volumet til en kjegle med topp i origo og bunn i planet $z = h$, slik som vist på figuren. Bunnen beskrives av $S = \{(x, y, z) : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y-b}{b})^2 \leq 1, z = h\}$ hvor $a, b > 0$.

**Steg 2** (5 poeng):

Spiller det i utregningen noen rolle at bunnen beskrives av en ellipse? Kunne den vært hvilket som helst areal i planet $z = h$, bunnet av en glatt kurve? Forklar med ord og med hensyn til betingelsene i Gauss teoremet.

Skriv ditt svar her eller bruk ark

Format ▾ | **B** *I* U $\times_2$ $\times^2$ | $\frac{\square}{\square}$ | | | | Ω Σ |

Words: 0

Maks poeng: 15

7 Her trenger du ikke vise utregninga kun forklare med ord (1-3). (8 poeng)

1. Gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = (-y, x, z\sqrt{x^2 + y^2})$, beskriv vektorfeltet når $z = 0$, hvordan ser feltlinjene ut?

Skriv ditt svar her

2. Er vektorfeltet $\mathbf{F}$ konservativt?

Skriv ditt svar her

3. Selv om vektorfeltet $\mathbf{G} = (-y, x)$ er inkompressibel (e. incompressible) er $\mathbf{F}$ det ikke. Forklar resultatet.

Skriv ditt svar her

Maks poeng: 8

- 8 Divergensteorem i 2D er et spesialtilfelle av divergensteoremet (Gauss teorem) og benyttes til gransking av divergensen til et vektorfelt i $\mathbb{R}^2$.

Steg 1 (5 poeng):

Skriv ned divergensteorem i 2D for et vektorfelt, $\mathbf{F}(x, y)$, på et område R som er begrenset med kurven C med en enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$ som peker utover (enhetsnormal på C), som vist på bildet.

[Figur fra tredjepart fjernet av opphavsrettshensyn.
Den viste et område R i planet med randkurve C ,
et vektorfelt F og utoverrettede enhetsnormaler $\hat{n}$ på C .]

Steg 2 (5 poeng):

Beskriv med ord hvordan teoremet tilknytter divergensen til fluksen av et vektorfelt. Her kan du gjerne tenke på $\mathbf{F}$ som en strøm av en væske/væskeflyt (e. fluid flow).

Steg 3 (5 poeng):

Beskriv med ord hva $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$, $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ og $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ betyr og ta utgangspunkt i teoremet. Bruk gjerne bildene nedenfor til å forklare på en god måte.

[Figur fra tredjepart fjernet av opphavsrettshensyn.
Den viste tre felt: piler inn mot et punkt ($\text{div } F < 0$),
piler ut fra et punkt ($\text{div } F > 0$) og parallelle piler ($\text{div } F = 0$).]

Skriv ditt svar her eller bruk ark

Format

B

I

U

x_2

x^2

I_x











$\frac{1}{2} =$

$: =$

Ω





Σ



Words: 0

Maks poeng: 15

- 9 Svar på spørsmål 1-5 om inverse funksjonsteorem. Her får du 2 poeng for hvert riktig svar, -2 poeng for feil svar og 0 poeng for ikke svart, total mulig poengsum 10.

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ være C^1 .

1. For at ligningene $F(x, y, z, u, v) = c_1$ og $G(x, y, z, u, v) = c_2$ implisitt skal kunne definere x, y, z som funksjoner av u, v nærme et punkt $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_5)$ så må $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$.

Velg ett alternativ:

- ☐ Sant
- ☐ Usant

2. For $F(x, y, z) = c$ så trenger vi $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ for å kunne beskrive x som en funksjon av de to andre variablene nærme punktet $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Velg et alternativ

- ☐ Sant
- ☐ Usant

3. Inverse funksjonsteoremet er et spesialtilfelle av implicit funksjonsteoremet hvor $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Velg et alternativ

- ☐ Sant
- ☐ Usant

4. La funksjonen $\mathbf{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ være gitt ved $x(u, v) = u^2 + v^2$ og $y(u, v) = uv$. Den inverse transformasjonen $\mathbf{F}^{-1}(x, y)$ eksisterer for alle (x, y) utenom $x = \pm 2y$.

Velg et alternativ

- ☐ Sant
- ☐ Usant

5. Hvis den inverse transformasjonen i (4) eksisterer må $\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1}$.

Velg et alternativ

- ☐ Sant
- ☐ Usant

- 11** Hvis det er andre ting knyttet til oppgavene du ønsker å ha med i din besvarelse kan du legge dette til her. Dette kan være ting du ikke fikk plass til i de aktuelle tekstboksene, kommentarer til flervalgsoppgavene eller andre presiseringer. Om du ikke har noen kommentarer, kan du la dette feltet stå ubesvart.

Maks poeng: 0