UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON1100 – Matematikk 1**

Eksamensdag: 12.12.2019 **Sensur kunngjøres: 06.01.2020**

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 12:00

Oppgavesettet er på 4 sider

Tillatte hjelpemidler:

- Det er tillatt å bruke ordbok. Ordboken skal være kontrollert av SV-infosenter på forhånd.

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

Oppgave 1 (av 4) (22 av 100 poeng)

Finn de førsteordensderiverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter:

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^6 - \sqrt{x}$

b) $g(x) = x^x$

c) $F(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$

d) $G(s, t) = 2xy$, der $x = t - s$ og $y = t + s$

Oppgave 2 (av 4) (24 av 100 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Differensialet til $f(x, y) = e^{xy}$ er $df = ye^{xy}dx$.

b) $\sum_{i=2}^{3} \left(\frac{2i}{i+1}\right) = \frac{17}{6}$

c) Maksimeringsproblemet

$$\max_x f(x) = ln(x) - g(x),$$

for $x \leq 10$ har hjørneløsningen $x = 10$ når $g(x)$ er avtakende.

d) Dersom $f(x) = e^{2x}$ og $g = f^{-1}$ er den inverse funksjonen av $f(x)$, så er $g'(1) = \frac{1}{2}$.

Oppgave 3 (av 4) (36 av 100 poeng)

Betrakt følgende nyttemaksimeringsproblem til en forbruker:

$$\max_{x,y} U(x,y) = ln(x) + ln(y) \qquad \text{gitt at } p_1 x + p_2 y = m \tag{1}$$

a) Sett opp Lagrange-funksjonen til maksimeringsproblemet og finn Lagrangebetingelsene.

b) Løs maksimeringsproblemet for optimalt valg av x og y.

c) Finn elastisitetene til x henholdsvis med hensyn på p_1, p_2 og m.

d) Betrakt følgende nivåkurve til nyttefunksjonen:

$$U(x,y) = ln(x) + ln(y) = 5$$

Vis at likningen til nivåkurven kan skrives som $y(x) = \frac{e^5}{x}$.

e) Er nivåkurven voksende eller avtakende? (Hint: Du trenger kun å vurdere verdier for x og y i definisjonsområdet til $U(x,y)$.)

f) Er nivåkurven konveks eller konkav? Lag en skisse av nivåkurven.

Oppgave 4 (av 4) (18 av 100 poeng)

Anta at en bedrift har en generell produktfunksjon $F(N)$, der $N = hn$, $h > 0$ er antall arbeidstimer per ansatt og n er antall ansatte. Anta an $F(N)$ er strengt voksende. La $p > 0$ være prisen på varen som bedriften produserer og selger, og la $w > 0$ være lønn per ansatt n. Betrakt bedriftens maksimeringsproblem:

$$\max_n \Pi(n) = p \cdot F(hn) - wn$$

Det kan vises at førsteordensbetingelsen til optimeringsproblemet er:

$$phF'(hn) = w$$

a) Hva må du kreve om $F(N)$ for at andreordensbetingelsen for et globalt optimum skal være oppfylt?

b) Anta i det videre at $F(N)$ er konkav. Førsteordensbetingelsen fra a) definerer etterspørsel etter arbeidskraft som en implisitt funksjon av lønna w, altså at $n = n(w)$. Bruk implisitt derivasjon til å finne $n'(w)$. Er etterspørselen etter arbeidskraft voksende eller avtakende i lønna?

c) Anta nå at $F(N) = N^{\alpha}$, der $0 < \alpha < 1$. Bruk førsteordens-betingelsen til å finne bedriftens optimale valg av antall ansatte n.