Oppgave 1 (av 6) (20 av 100 poeng)
Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x} + 1$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^{-3}e^{3x}$

c) $x(p, q) = \frac{m}{u+v}$, der $u = p^2$ og $v = q^2 - p$, og m er en konstant

d) $F(x, y) = \frac{x}{y}e^{b(x,y)}$, der $b(x, y)$ er en generell (ukjent) funksjon av x og y.

Oppgave 2 (av 6) (20 av 100 poeng)
Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Den førstederiverte til en stigende funksjon $f(x)$ er selv en stigende funksjon.

b) Den lineære approksimasjonen til $Y(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ rundt $(K_0, L_0) = (1, 1)$ er gitt ved

$$Y(K, L) \approx \alpha AK + (1 - \alpha)AL$$

c) $f(x) = x^4 - 3$ har et minimumspunkt når $x = 0$.

d) $f(x) = \sqrt{x}$ har hverken et globalt minimumspunkt eller et globalt maksimumspunkt. (Hint: Sjekk definisjonsområdet til funksjonen.)

Oppgave 3 (av 6) (10 av 100 poeng)
I denne oppgaven skal du tegne en skisse av en funksjon $f(x)$. Skissa trenger ikke være nøyaktig, men all informasjon som er listet opp under skal kunne leses ut av grafen.

Funksjonen karakteriseres på følgende måte:

- Funksjonen er definert i intervallet $x \in [-10, 10]$.
- Funksjonen har to stasjonærpunkt – ett globalt ekstrempunkt når $x = -2$ og ett ytterligere stasjonærpunkt når $x = 5$.
- Om $f'(x)$ vet vi følgende:
  - $f'(x) \geq 0$ når $x \leq -2$.
  - $f'(x) \leq 0$ når $x \geq -2$.

Oppgave 4 (av 6) (10 av 100 poeng)
Betrakt funksjonen $h(x) = x^{a(x)}$, der $a(x) = \ln(x) + 1$.

a) Bestem definisjonsområdet

b) Vis at $h'(x) = (2\ln x + 1)x^{\ln x}$

c) Finn $El_x h(x)$

Oppgave 5 (av 6) (30 av 100 poeng)

a) Betrakt først følgende nyttefunksjon:

$$U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Vis at stigningstallet til nivåkurven $x_2(x_1)$ er

$$x_2'(x_1) = -\frac{x_2}{x_1}$$

b) Bestem om nivåkurven fra oppgave a) er konveks eller konkav.

Heretter generaliserer vi nyttefunksjonen, slik at den tar følgende form:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\sigma}x_1^{1-\sigma} + \frac{1}{1-\sigma}x_2^{1-\sigma} \quad \text{der } \sigma \in (0,1)$$

Anta at konsumenten maksimerer nytte gitt en budsjettbetingelse. Det gir følgende nyttemaksimeringsproblem (der $\sigma \in (0,1)$):

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\sigma}x_1^{1-\sigma} + \frac{1}{1-\sigma}x_2^{1-\sigma} \quad \text{gitt at} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

c) Sett opp Lagrange-problemet og finn førsteordensbetingelsene.

d) Løs førsteordensbetingelsene for å finne etterspørselen etter x_1 og x_2 (dvs. finn $x_1^*(p_1, p_2, m)$ og $x_2^*(p_1, p_2, m)$). Du kan anta at stasjonærpunktet er et maksimumspunkt.

e) Bruk det generelle omhyllingsteoremet til å finne $\frac{dU^*(x_1,x_2)}{dp_1}$, $\frac{dU^*(x_1,x_2)}{dp_2}$ og $\frac{dU^*(x_1,x_2)}{dm}$. Du kan oppgi disse som funksjoner av x_1^*, x_2^* og λ.

Oppgave 6 (av 6) (10 av 100 poeng)
Betrakt følgende nyttemaksimeringsproblem[1] med én bibetingelse:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} U(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{1-\sigma}\sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\sigma} \quad \text{gitt at} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m$$

der $\sigma \in (0,1)$.

a) Sett opp Lagrange-problemet og finn førsteordensbetingelsene. (Hint: Her er det tilstrekkelig å finne én generell førsteordensbetingelse for x_i.)

b) Anta at $p_i = p$ for alle i. Finn etterspørselen etter alle x_i (dvs. finn $x_i^*(p,m)$ for $i = 1,\ldots,n$). Du kan anta at stasjonærpunktet er et maksimumspunkt.

Hint: Hvis det er nyttig i utregningen din kan du benytte følgende regneregler for summer:

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \tag{2}$$

Med ord: (1) innebærer at konstantledd (som ikke avhenger av i) kan trekkes utenfor summen. (2) innebærer at en sum av konstantledd er konstantleddet multiplisert med n .

1. Her har vi utvidet nyttemaksimeringsproblemet i forrige oppgave til et generelt tilfelle. I forrige oppgave var $n = 2$.