

Oppgave 1 (av 5) (20 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = x^3 - 3x^4 + 2\sqrt{x} - 4$

b) $g(z) = \frac{z^4}{2a(z)}$, der $a(z) > 0$ er en generell funksjon

c) $h(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x - y)$

d) $d(p, q) = x^2 + cm(y)$, der $x(p, q) = -2p + q$ og $y(p, q) = 15 + p - 2q$. Merk at c er en konstant og $m(y)$ er en generell funksjon.

Oppgave 2 (av 5) (20 av 100 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) $\sum_{i=1}^5 a = 32$ hvis $a = 8$

b) Problemet

$$\max_{x_1, x_2} x_1^\gamma + x_2^\gamma \quad \text{gitt at} \quad g(x_1, x_2) = m$$

har et stasjonærpunkt der $x_1^* = x_2^*$ dersom $g'_{x_1}(x_1, x_2) = g'_{x_2}(x_1, x_2)$.

c) Betrakt maksimeringsproblemet

$$\max_x f(x) \quad \text{gitt at} \quad x = a$$

Løsningen på problemet er $x^* = a$.

d) Nivåkurvene $K(L)$ til $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ (definert når $K, L > 0$) er stigende hvis $\alpha \in (0, 1)$.

Oppgave 3 (av 5) (20 av 100 poeng)

Betrakt følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (x-1)^2 - 6x$$

- a) For hvilke x er $f(x)$ voksende, og for hvilke x er funksjonen avtakende?
(*Hint:* Bruk andregradsformelen/ABC-formelen til å faktorisere $f'(x)$.)
- b) For hvilke x er $f(x)$ konveks, og for hvilke x er funksjonen konkav?
- c) Finn funksjonens stasjonærpunkt og klassifiser dem. Er eventuelle ekstrempunkt lokale eller globale?
- d) Tegn en skisse av funksjonen. Skissen trenger ikke være nøyaktig, men egenskapene du har funnet i deloppgavene over skal fremgå.

Oppgave 4 (av 5) (20 av 100 poeng)

a) Er nyttefunksjonen $u(c_1, c_2) = (c_1^\beta + c_2^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ homogen? Av hvilken grad?

b) La $F(x, y) = (xy)^{xy}$ være definert for $x, y > 0$.

i) Vis at

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= y(xy)^{xy}(\ln(x) + \ln(y) + 1) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= x(xy)^{xy}(\ln(x) + \ln(y) + 1)\end{aligned}$$

ii) Finn den lineære approksimasjonen til $F(x, y)$ rundt punktet $(1, 1)$.

c) Anta at $f(x) = g(u(x))$, og $u \equiv u(x)$. Vis at følgende holder:

$$El_x f(x) = El_u g(u) El_x u(x)$$

Hint: $El_x f(x)$ kan skrives om til et uttrykk som inneholder g og u .

Oppgave 5 (av 5) (20 av 100 poeng)

Et land har behov for X enheter energi, som kan komme fra enten fossil energi (x_1) eller fornybar energi (x_2). Landet ønsker å minimere sine energikostnader, og dersom det produserer like mye fornybar som fossil energi, er det alltid dyrere å øke produksjonen av fornybar energi, slik at $c_1 < c_2$ (der $c_1, c_2 > 0$). Det gir følgende kostnadsminimeringsproblem:

$$\min_{x_1, x_2} C(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \quad \text{gitt at} \quad x_1 + x_2 = X \quad (1)$$

- a) Sett opp Lagrange-problemet og finn førsteordensbetingelsene.
- b)
 - i) Finn landets optimale produksjon av fossil og fornybar energi, x_1^* og x_2^* .
 - ii) Produserer landet mest fossil eller mest fornybar energi?
- c) Hvordan endres kostnadene $C(x_1^*, x_2^*)$ hvis landet øker energiforbruket X ? Du kan enten oppgi svaret som funksjon av λ , eller av parameterne i modellen (c_1 , c_2 og X). (*Hint*: Hva er $\frac{dC(x_1^*, x_2^*)}{dX}$? Bruk det generelle omhyllingsteoremet.)
- d) Produksjon av fossil energi medfører klimagassutslipp, som fører til skade på det globale klimaet. Dersom landet tar inn over seg denne kostnaden, tar kostnadsfunksjonen i (1) følgende form:

$$\tilde{C}(x_1, x_2) = (c_1 + b)x_1^2 + c_2 x_2^2$$

Hvor stor må b være for at landet nå skal velge å produsere mer fornybar energi (x_2) enn fossil energi (x_1)?