UNIVERSITETET I OSLO
ØKONOMISK INSTITUTT

Eksamen i: **ECON1100 – Matematikk 1**

Eksamensdag: 22.05.2018 **Sensur kunngjøres: 12.06.2018**

Tid for eksamen: kl. 09:00 – 12:00

Oppgavesettet er på 3 sider

Tillatte hjelpemidler:

- Det er tillatt å bruke ordbok. Ordboken skal være kontrollert av SV-infosenter på forhånd.

Eksamen blir vurdert etter ECTS-skalaen. A-F, der A er beste karakter og E er dårligste ståkarakter. F er ikke bestått.

Oppgave 1 (15 poeng)

Finn de førstederiverte og bestem definisjonsområdet til følgende funksjoner:

a) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \frac{3x^3 - 4x + 2}{(x+1)^2}$

c) $F(x, y) = \frac{3x^3 - 4x + 2}{(x+1)^2} \frac{(\ln y)^2}{y}$

d) $G(x, y) = \frac{(\ln xy^2)^3}{xy}$

Oppgave 2 (20 poeng)

a) Finn det ubestemte integralet i de fire tilfellene:

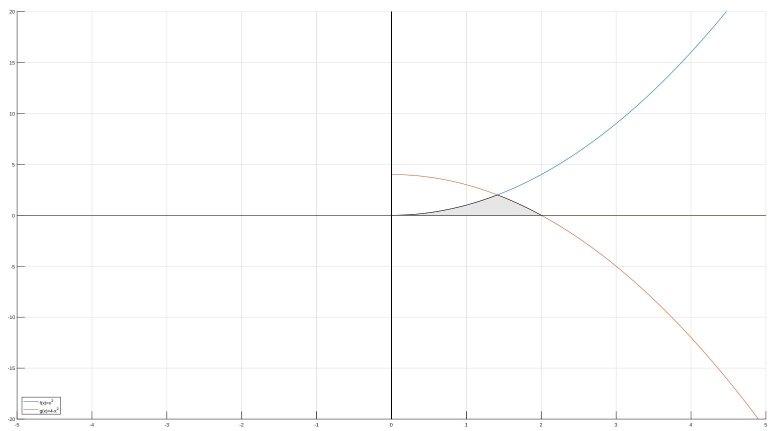
(i) $\int x^2 dx$

(ii) $\int (4 - x^2) dx$

(iii) $\int (x - 2) dx$

(iv) $-\int \frac{1}{x-1} dx$

b) Hvor stort er arealet som er avgrenset av $f(x), g(x)$ og linjen $y = 0$ i Figur 1 (det skraverte området i figuren)?



Figur 1: Blå (stigende): $f(x) = x^2$, rød (fallende): $g(x) = 4 - x^2$

c) Vis at følgende er sant:

$$\int \left(\frac{1-(1+x)\ln x}{x^2 e^x} \right) dx = \frac{\ln x}{x e^x} + C$$

(Hint: Ikke forsøk å løse integralet)

Oppgave 3 (25 poeng)

Du er bedt om å løse følgende problem ved hjelp av Lagrange-metoden:

$$\max_{x,y} F(x,y) \quad \text{gitt at} \quad g(x) + f(y) = m$$

a) Still opp Lagrange-funksjonen og finn førsteordensbetingelsene.

b) Vis at de to førsteordensbetingelsene tilsammen gir:

$$\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)} = \frac{g'(x)}{f'(y)} \tag{$*$}$$

Anta at i det videre at:

$$F(x,y) = \ln x + \ln 2y$$
$$g(x) + f(y) = p_1 x + p_2 y^2$$

c) Uten å løse Lagrange-problemet på nytt: Bruk betingelsen i $(*)$ til å finne et eksplisitt uttrykk for x som en funksjon av y.

d) Vis at:

$$x = \frac{2m}{3p_1}$$

Finn også y kun uttrykt ved m og p_2.

e) Hvordan endres x om p_1 øker litt? Hva er elastisiteten til x med hensyn på p_1?

Oppgave 4 (25 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret.

a) En funksjon som er strengt konveks i hele sitt definisjonsområde kan aldri ha en førstederivert som er negativ.

b) Funksjonen $F(x) = 2x^2 - 4x + 1$ har et globalt minimum i punktet $(x, y) = (1, -1)$.

c) Funksjonen $G(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$ har to stasjonærpunkter $(x, y) = (0, 0)$ og $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, der det første punktet er et sadelpunkt, mens det andre punktet er et lokalt minimumspunkt.

d) Funksjonen $y = |x|$ (absoluttverdien til x) er overalt deriverbar, med $y'(x) = 1$ for alle x.

Oppgave 5 (15 poeng)

Finn $y'(x)$ ved bruk av implisitt derivasjon:

a) $\frac{\ln x}{y^2}\sqrt{yx^2} = 1$

b) $e^{xy^2} + H(t(x), v(y)) = 0$