

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for full uttelling.

Oppgave 1 (20 poeng)

Finn de første- og andreordensderiverte til følgende funksjoner:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$

Svar:

$$f'(x) = x^3 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $g(y) = \frac{y^2+a}{y}$

Svar:

$$g'(y) = \frac{y^2 - a}{y^2}$$

c) $F(x, y) = (2x^2 - 3)e^y(y + 1)$

Svar:

$$F'_x(x, y) = 4xe^y(y + 1)$$

$$F'_y(x, y) = (2x^2 - 3)e^y(y + 2)$$

d) $G(a, b) = \frac{\ln(a^3 b^2)}{a}$

Svar:

$$G'_a(a, b) = \frac{3(1 - \ln a) - 2 \ln b}{a^2}$$

$$G'_b(a, b) = \frac{2}{ab}$$

e) $H(u, v) = 2u + v^2$, der $u = x^2 + y^2$ og $v = x - y$

Svar:

$$\begin{aligned} H'_x &= H'_u u'_x + H'_v v'_x \\ &= 6x - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_y &= H'_u u'_y + H'_v v'_y \\ &= 6y - 2x \end{aligned}$$

Oppgave 2 (20 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) $\sum_{n=1}^4 (n^2 - 2n) = 12$

Svar:

Usant:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^4 (n^2 - 2n) &= (1 - 2) + (4 - 4) + (9 - 6) + (16 - 8) \\ &= 10\end{aligned}$$

b) $\ln(x + y) = \ln x \cdot \ln y$

Svar:

Usant. Riktig regel: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, men $\ln(x + y) \neq \ln x \cdot \ln y$

c) $El_y e^{(xy+y^2)} = y(x + 2y)$

Svar:

Sant.

$$\begin{aligned}El_y e^{(xy+y^2)} &= \frac{y}{e^{(xy+y^2)}} e^{(xy+y^2)} (x + 2y) \\ &= y(x + 2y)\end{aligned}$$

d) Funksjonen $f(x, y, z) = x^2y^2 + xz^3 + x^2yz$ er homogen av grad 3.

Svar:

Usant. Den er homogen av grad 4:

$$\begin{aligned} f(tx, ty, tz) &= (tx)^2(ty)^2 + (tx)(tz)^3 + (tx)^2(ty)(tz) \\ &= t^4x^2y^2 + t^4xz^3 + t^4x^2yz \\ &= t^2(x^2y^2 + xz^3 + x^2yz) \\ &= t^4f(x, y, z) \end{aligned}$$

e) $\int \frac{x^2(1-x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{x+1} + C$

Svar:

Usant. Deriverer høyresiden av uttrykket:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{x+1} + C \right) &= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \neq \frac{x^2(1-x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Oppgave 3 (30 poeng)

Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = x^2y + x^2 + 2y^2$$

a) Bestem definisjonsområdet til f .

Svar:

Funksjonen er definert for alle reelle verdier av x og y : $x \in (-\infty, \infty)$ og $y \in (-\infty, \infty)$

b) Finn de første- og andreordensderiverte til f .

Svar:

$$f'_x = 2xy + 2x$$

$$f'_y = x^2 + 4y$$

$$f''_{xx} = 2y + 2$$

$$f''_{yy} = 4$$

$$f''_{xy} = 2x$$

c) For hvilke verdier av x og y er f voksende i x ?

Svar:

f er voksende i x , dersom $f'_x(x, y) \geq 0$:

$$2xy + 2x \geq 0$$

$$2x(y + 1) \geq 0$$

f er voksende i x hvis:

- $x \in [0, \infty)$ og $y \in [-1, \infty)$
- eller $x \in (-\infty, 0]$ og $y \in (-\infty, -1]$

d) For hvilke kombinasjoner av x og y er f konveks?

Svar:

f er konveks hvis:

$$f''_{xx}(x, y) \geq 0$$

$$f''_{yy}(x, y) \geq 0$$

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - \left(f''_{xy}(x, y)\right)^2 \geq 0$$

Fra de andrederiverte i b) finner man:

$$y \geq -1 \tag{1}$$

$$4 \geq 0 \tag{2}$$

$$2(y+1) \geq x^2 \tag{3}$$

(3) impliserer (1) (med andre ord: dersom likning (3) holder, holder også likning (1).) Likning (3) er dermed en tilstrekkelig betingelse for at f er konvex.

f er konveks dersom $2(y+1) \geq x^2$.

e) Finn eventuelle stasjonærpunkter til f .

Svar:

$$f'_x = 2xy + 2x$$

$$f'_y = x^2 + 4y$$

$\Downarrow$

$$2x(y+1) = 0 \tag{4}$$

$$x = \pm 2\sqrt{-y} \tag{5}$$

(4) gir enten $x = 0$ eller $y = -1$. Innsetting i (5) gir følgende stasjonærpunkter:

$$(x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (2, -1)$$

$$(x_3, y_3) = (-2, -1)$$

f) Klassifiser stasjonærpunktet/punktene. Er dette globale eller lokale optima?

Svar:

Sjekker andreordensbetingelsene for hvert stasjonærpunkt:

Punkt 1:

$$f''_{xx}(x_1, y_1) = 2 > 0$$

$$f''_{yy}(x_1, y_1) = 4 > 0$$

$$f''_{xx}(x_1, y_1)f''_{yy}(x_1, y_1) - \left(f''_{xy}(x_1, y_1)\right)^2 = (2 \cdot 0 + 2)4 - 0 = 8 > 0$$

Punktet $(0, 0)$ er et lokalt minimumspunkt.

Punkt 2:

$$f''_{xx}(x_2, y_2) = 0 \not> 0$$

$$f''_{yy}(x_2, y_2) = 4 > 0$$

$$f''_{xx}(x_2, y_2)f''_{yy}(x_2, y_2) - \left(f''_{xy}(x_2, y_2)\right)^2 = 0 - 16 < 0$$

Punktet $(2, -1)$ er et sadelpunkt.

Punkt 3:

$$f''_{xx}(x_3, y_3) = 0 \not> 0$$

$$f''_{yy}(x_3, y_3) = 4 > 0$$

$$f''_{xx}(x_3, y_3)f''_{yy}(x_3, y_3) - \left(f''_{xy}(x_3, y_3)\right)^2 = 0 - 16 < 0$$

Punktet $(-2, -1)$ er et sadelpunkt.

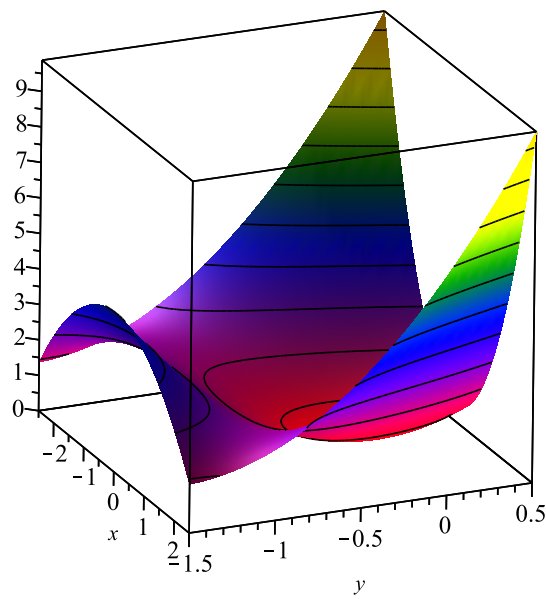


Figure 1: $f(x, y) = x^2y + x^2 + 2y^2$

Oppgave 4 (av 4) (30 poeng)

Betrakt funksjonen

$$g(x, y) = e^{-xy} - xy$$

a) Finn differensialet til g .

Svar:

$$\begin{aligned} dg &= g'_x(x, y)dx + g'_y(x, y)dy \\ &= -y(e^{-xy} + 1)dx - x(e^{-xy} + 1)dy \end{aligned}$$

b) Finn den lineære approksimasjonen til g rundt $(x, y) = (1, 0)$.

Svar:

Finner først:

$$\begin{aligned} g'_x(1, 0) &= 0 \\ g'_y(1, 0) &= -2 \\ g(1, 0) &= 1 \end{aligned}$$

den lineære approksimasjonen blir dermed:

$$\begin{aligned} g(x, y) &\approx g(1, 0) + g'_x(1, 0)(x - 1) + g'_y(1, 0)(y - 0) \\ &\approx 1 - 2y \end{aligned}$$

c) Approksimer $g(0.98, 0.01)$ ved hjelp av tilvekstformelen.

Hva blir approksimasjonsfeilen dersom $g(0.98, 0.01) = 0.98045$?

Svar:

$$\begin{aligned} g(x, y) &\approx g(1, 0) + g'_x(1, 0)dx + g'_y(1, 0)dy \\ &\approx 1 + 0 - 2 \cdot 0.01 = 0.98 \end{aligned}$$

Faktisk funksjonsverdi er $g(0.98, 0.01) = 0.98045$. Dermed blir approksimasjonsfeilen $0.98 - 0.98045 = -0.00045$ (estimatet er for lavt). Her bør kandidaten ha rett fortegn for å full uttelling.

d) Anta nå at vi ser på en nivåkurve til $g(x, y)$, slik at:

$$g(x, y) = e^{-xy} - xy = c,$$

der c er en konstant. Finn $y'(x)$ ved bruk av implisitt derivasjon.

Svar:

Bruker at $y'(x) = -\frac{g'_x(x, y)}{g'_y(x, y)}$ Dermed får vi:

$$y'(x) = -\frac{y}{x}$$

Anta i det videre at $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

e) Er nivåkurvene til f voksende eller avtakende? Begrunn svaret ditt.

Svar:

$$y'(x) = -\frac{y}{x} \leq 0 \quad \text{ettersom } x \geq 0, y \geq 0$$

Nivåkurvene til f er derfor avtakende.

f) Er nivåkurvene til f konvekse eller konkave? Begrunn svaret ditt.

Svar:

For følgende utregning er det avgjørende å skjønne at $y = y(x)$.

$$\begin{aligned}y'(x) &= -\frac{y(x)}{x} \\ \Downarrow \\ y''(x) &= -\frac{y'(x)x - y}{x^2} \\ &= -\frac{-\frac{y}{x}x - y}{x^2} \\ &= \frac{2y}{x^2} \geq 0 \quad \text{ettersom } x \geq 0, y \geq 0\end{aligned}$$

Nivåkurvene til f er derfor konvekse.¹

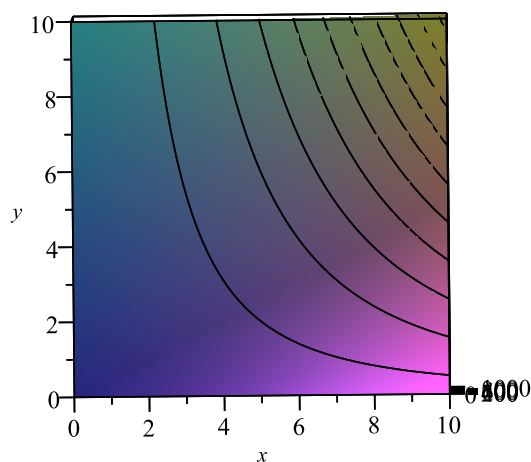


Figure 2: Nivåkurver for $g(x, y) = e^{-xy} - xy$

¹Merknad: Dersom kandidaten glemmer at y er en funksjon av x , vil hen også finne at nivåkurvene er konvekse: $y''(x) = \frac{y}{x^2}$. Resultatet er tilfeldigvis det samme, men fremgangsmåten er feil.