

---

## Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
  - Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
  - Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
  - Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for full uttelling.
- 
- 

### Oppgave 1 (av 4) (22 av 100 poeng)

Finn de førsteordensderiverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter:

a)  $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^6 - \sqrt{x}$

Svar:

$$f'(x) = 3x^2 + 3x^5 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

---

---

**b)**  $g(x) = x^x$

Svar:

Bruker logaritmisk derivasjon:

$$g(x) = x^x \quad , \text{ tar logaritmen p\u00e5 hver side av likhetstegnet}$$

$$\ln(g(x)) = \ln(x^x) \quad \text{bruker logaritmeregler til \u00e5 skrive om}$$

$$\ln(g(x)) = x \ln(x) \quad \text{deriverer p\u00e5 hver side av likhetstegnet}$$

$$\underbrace{\frac{g'(x)}{g(x)}}_{\text{Kjerneregelen}} = \underbrace{1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}_{\text{Produktregelen}}$$

$$g'(x) = (\ln(x) + 1)g(x)$$

$$g'(x) = (\ln(x) + 1)x^x$$

---

**c)**  $F(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$

Svar:

Bruker kvotientregelen til \u00e5 finne  $F'_x(x, y)$ :

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= \frac{2x(x+y) - x^2 \cdot 1}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x(x+2y)}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

---

Bruker kjerneregelen til å finne  $F'_y(x, y)$ :

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= F'(u) \cdot u'_y && \text{der } F(u) = x^2 u^{-1} \text{ og } u = x + y \\ &= \underbrace{x^2(-1)u^{-2}}_{F'(u)} \cdot \underbrace{1}_{u'_y} = -\frac{x^2}{u^2} \\ &= -\frac{x^2}{(x + y)^2} \end{aligned}$$

---

d)  $G(s, t) = 2xy$ , der  $x = t - s$  og  $y = t + s$

Svar:

Bruker kjerneregelen for to kjerner  $(x, y)$  og to variabler  $(s, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial s} &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 2y \cdot (-1) + 2x \cdot 1 \\ &= \underline{\underline{2(x - y)}} \quad \text{Dette er et riktig svar. Evt. kan vi sette videre inn for } x, y \\ &= 2(t - s - t - s) \\ &= \underline{\underline{-4s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= 2y \cdot 1 + 2x \cdot 1 \\ &= \underline{\underline{2(x + y)}} \quad \text{Dette er et riktig svar. Evt. kan vi sette videre inn for } x, y \\ &= 2(t - s + t + s) \\ &= \underline{\underline{4t}} \end{aligned}$$

---

**Oppgave 2** (av 4) (24 av 100 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Differensialet til  $f(x, y) = e^{xy}$  er  $df = ye^{xy}dx$ .

Svar:

$$\begin{aligned}df &= f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \\ &= ye^{xy}dx + xe^{xy}dy \neq ye^{xy}dx\end{aligned}$$

USANT

---

b)  $\sum_{i=2}^3 \left(\frac{2i}{i+1}\right) = \frac{17}{6}$

Svar:

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^3 \left(\frac{2i}{i+1}\right) &= \frac{2 \cdot 2}{2+1} + \frac{2 \cdot 3}{3+1} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \\ &= \frac{8+9}{6} = \frac{17}{6}\end{aligned}$$

SANT

---

---

c) Maksimeringsproblemet

$$\max_x f(x) = \ln(x) - g(x),$$

for  $x \leq 10$  har hjørneløsningen  $x = 10$  når  $g(x)$  er avtakende.

Svar:

Maksimeringsproblemet har en hjørneløsning til høyre dersom  $f'(x) > 0$  for alle  $0 < x \leq 10$ :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - g'(x)$$

Dersom  $g(x)$  er avtakende, så er  $g'(x) \leq 0$ . Etersom  $x > 0$ , blir også  $f'(x) > 0$ .

Dermed får problemet en hjørneløsning til høyre.

SANT

---

d) Dersom  $f(x) = e^{2x}$  og  $g = f^{-1}$  er den inverse funksjonen av  $f(x)$ , så er  $g'(1) = \frac{1}{2}$ .

Svar:

Alternativ 1: Løse for  $y$  eksplisitt:

$$y = e^{2x}$$

$$\ln(y) = 2x$$

$$x = g(y) = \frac{1}{2}\ln(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{2y}$$

$$\Rightarrow g'(1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

---

Alternativ 2: Bruke uttrykket for den deriverte av en invers funksjon:

$$\begin{aligned}g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{2e^{2x}}\end{aligned}$$

Bruker så at:

$$y = 1 = e^{2x} \quad \Rightarrow x = 0$$

↓

$$g'(1) = \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2}$$

SANT

---

---

**Oppgave 3** (av 4) (36 av 100 poeng)

Betrakt følgende nyttemaksimeringsproblem til en forbruker:

$$\max_{x,y} U(x, y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{gitt at } p_1x + p_2y = m \quad (1)$$

a) Sett opp Lagrange-funksjonen til maksimeringsproblemet og finn Lagrange-betingelsene.

Svar:

Lagrange-funksjonen og -betingelsene er:

$$\mathcal{L} = \ln(x) + \ln(y) - \lambda(p_1x + p_2y - m)$$

↓

$$\mathcal{L}'_x = \frac{1}{x} - \lambda p_1 \quad (2)$$

$$\mathcal{L}'_y = \frac{1}{y} - \lambda p_2 \quad (3)$$

$$p_1x + p_2y = m \quad (4)$$

---

b) Løs maksimeringsproblemet for optimalt valg av  $x$  og  $y$ .

Svar:

Fra (2) har vi at:

$$\lambda = \frac{1}{p_1x}$$

---

Fra (3) har vi at:

$$\lambda = \frac{1}{p_2 y}$$

Dermed er:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1 x} &= \frac{1}{p_2 y} & (5) \\ p_1 x &= p_2 y \\ x &= \frac{p_2 y}{p_1} \end{aligned}$$

Setter inn for  $x$  i (4):

$$\begin{aligned} p_1 \cdot \frac{p_2 y}{p_1} + p_2 y &= m \\ p_2 y + p_2 y &= m \\ 2p_2 y &= m \\ \underline{\underline{y}} &= \underline{\underline{\frac{m}{2p_2}}} \end{aligned}$$

Setter inn løsningen for  $y$  i (5):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{x}} &= \frac{p_2}{p_1} y \\ &= \frac{p_2}{p_1} \frac{m}{2p_2} \\ &= \underline{\underline{\frac{m}{2p_1}}} \end{aligned}$$

---

---

c) Finn elastisitetene til  $x$  henholdsvis med hensyn på  $p_1$ ,  $p_2$  og  $m$ .

Svar:

Her kan studentene bruke potensregelen for elastisiteter:

$$\begin{aligned}El_x K x^p &= p \\ &\& \\ x &= \frac{1}{2} m^1 p_1^{-1}\end{aligned}$$

Da blir elastisitetene som følger:

$$El_{p_1} x = -1$$

$$El_{p_2} x = 0$$

$$El_m x = 1$$

Alternativt kan de benytte definisjonen og finne elastisitetene vha de deriverte:

$$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

---

---

d) Betrakt følgende nivåkurve til nyttefunksjonen:

$$U(x, y) = \ln(x) + \ln(y) = 5$$

Vis at likningen til nivåkurven kan skrives som  $y(x) = \frac{e^5}{x}$ .

Svar:

Løser likningen for  $y$ :

$$\ln(x) + \ln(y) = 5$$

$$\ln(xy) = 5$$

$$xy = e^5$$

$$y(x) = \frac{e^5}{x}$$

---

e) Er nivåkurven voksende eller avtakende? (Hint: Du trenger kun å vurdere verdier for  $x$  og  $y$  i definisjonsområdet til  $U(x, y)$ .)

Svar: Etersom funksjonen er voksende i begge argumenter, er nivåkurvene avtakende. Dette kan også vises ved:

$$y(x) = e^5 x^{-1}$$

↓

$$\begin{aligned} y'(x) &= (-1)e^5 x^{-2} \\ &= -\frac{e^5}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

Dermed er nivåkurven avtakende.

---

f) Er nivåkurven konveks eller konkav? Lag en skisse av nivåkurven.

Svar:

$$y'(x) = -e^5 x^{-2}$$

↓

$$y''(x) = (-2)(-e^5)x^{-3}$$

$$= \frac{2e^5}{x^3} > 0 \quad (\text{for definisjonsområdet } x, y > 0)$$

Dermed er nivåkurven konveks.

Skisse: Her må kandidatene tegne korrekt ift *egne* funn om hvorvidt funksjonen er konveks/konkav og voksende/avtakende.

---

---

**Oppgave 4** (av 4) (18 av 100 poeng)

Anta at en bedrift har en generell produktfunksjon  $F(N)$ , der  $N = hn$ ,  $h > 0$  er antall arbeidstimer per ansatt og  $n$  er antall ansatte. Anta at  $F(N)$  er strengt voksende. La  $p > 0$  være prisen på varen som bedriften produserer og selger, og la  $w > 0$  være lønn per ansatt  $n$ . Betrakt bedriftens maksimeringsproblem:

$$\max_n \Pi(n) = p \cdot F(hn) - wn$$

Det kan vises at førsteordensbetingelsen til optimeringsproblemet er:

$$phF'(hn) = w$$

**a)** Hva må du kreve om  $F(N)$  for at andreordensbetingelsen for et globalt optimum skal være oppfylt?

Svar:

AOBen for maksimum er:

$$\Pi''(n) = ph^2F''(N) \leq 0$$

Ettersom  $p > 0$  og  $h > 0$ , må  $F''(N) \leq 0$  ( $F(N)$  må være konkav).

---

---

b) Anta i det videre at  $F(N)$  er konkav. Førsteordensbetingelsen fra a) definerer etterspørsel etter arbeidskraft som en implisitt funksjon av lønna  $w$ , altså at  $n = n(w)$ . Bruk implisitt derivasjon til å finne  $n'(w)$ . Er etterspørselen etter arbeidskraft voksende eller avtakende i lønna?

Svar:

Alternativ 1:

$$phF'(hn(w)) = w$$

$$phF''(N)hn'(w) = 1$$

$$n'(w) = \frac{1}{ph^2F''(N)} < 0 \quad \text{ettersom } p, h > 0 \text{ \& } F''(N) < 0$$

Alternativ 2: Bruker følgende regel for implisitt derivasjon.

$$F(x, y) = c \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$\underbrace{phF'(hn) - w}_{G(w,n)} = \underbrace{0}_c$$

$$n'(w) = -\frac{G'_w}{G'_n}$$

$$= -\frac{(-1)}{ph^2F''(N)}$$

$$= \frac{1}{ph^2F''(N)} < 0 \quad \text{ettersom } p, h > 0 \text{ \& } F''(N) < 0$$

---

c) Anta nå at  $F(N) = N^\alpha$ , der  $0 < \alpha < 1$ . Bruk førsteordensbetingelsen til å finne bedriftens optimale valg av antall ansatte  $n$ . [Svar:](#)

Bruker FOBen og at  $F'(N) = \alpha N^{\alpha-1}$ :

$$phF'(N) = w$$

$$ph\alpha N^{\alpha-1} = w$$

$$ph\alpha(hn)^{\alpha-1} = w$$

$$p\alpha h^\alpha n^{\alpha-1} = w$$

$$n^{\alpha-1} = \frac{w}{p\alpha} h^{-\alpha}$$

$$n = \left(\frac{w}{p\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} h^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$\underline{\underline{n = \left(\frac{p\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} h^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}}$$

---