Sensorveiledning til eksamen i ECON1100, høst 2020*

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for uttelling.

*Merk: Det er gjort enkelte notasjonsmessige endringer etter eksamen, for å tydeliggjøre. Dette for å gjøre det enklere for fremtidige studenter.

Oppgave 1 av 5 (20 av 100 poeng)

Finn de førsteordensderiverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter:

a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + 2$

Svar:

$$f'(x) = 2x + \frac{4}{3}x^3$$

---

b) $z(x) = \frac{\ln(x)}{(x+1)}$

Svar:

$$z'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln(x)}{(x+1)^2} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln(x)}{(x+1)^2}$$

---

c) $h(x) = a^{x^b}$

Svar:

$$h'(x) = a^{x^b}\ln(a)(bx^{b-1})$$

---

d) $F(x,y) = e^x \ln(xy)$

Svar:

$$F'_x(x,y) = e^x \ln(xy) + \frac{ye^x}{xy} = e^x(\ln(xy) + \frac{1}{x})$$
$$F'_y(x,y) = \frac{xe^x}{xy} = \frac{e^x}{y}$$

---

e) $G(x,y) = \frac{xy+5}{x^2y}$

<u>*Svar:*</u>

$$G'_x(x,y) = \frac{yx^2y - (xy+5)2xy}{(x^2y)^2} = \frac{x^2y^2 - 2x^2y^2 - 10xy}{x^4y^2} = -\frac{xy+10}{x^3y}$$

$$G'_y(x,y) = \frac{xx^2y - (xy+5)x^2}{(x^2y)^2} = \frac{x^3y - x^3y - 5x^2}{x^4y^2} = -\frac{5}{x^2y^2}$$

---

f) $H(x,y) = 2u + g(u,v)$, der $u = x^2 + y^2$, $v = x - y$ og $g(u,v)$ er en vilkårlig, ukjent funksjon. Sett inn for u og v i uttrykkene for de deriverte.

<u>*Svar:*</u>

$$H(x,y) = 2u + g(u,v) = 2x^2 + 2y^2 + g(x^2+y^2, x-y)$$

$$\Rightarrow H'_x(x,y) = 4x + g'_u(x^2+y^2, x-y)2x + g'_v(x^2+y^2, x-y)$$

$$\Rightarrow H'_y(x,y) = 4y + g'_u(x^2+y^2, x-y)2y - g'_v(x^2+y^2, x-y)$$

Oppgaven kan også løses ved å bruke kjerneregelen direkte:

$$H(x,y) = 2u + g(u,v), \quad u = x^2+y^2, \quad v = x-y$$

$$\Rightarrow H'_x(x,y) = 2\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=2x} + g'_u(u,v)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=2x} + g'_v(u,v)\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = 4x + g'_u(x^2+y^2, x-y)2x + g'_v(x^2+y^2, x-y)$$

$$\Rightarrow H'_y(x,y) = 2\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=2y} + g'_u(u,v)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=2y} + g'_v(u,v)\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=-1} = 4y + g'_u(x^2+y^2, x-y)2y - g'_v(x^2+y^2, x-y)$$

Dersom kandidaten ikke har satt inn for u eller v i $g'_u(u,v)$ og/eller $g'_v(u,v)$ gis det mindre trekk i uttellingen.

Oppgave 2 av 5 (25 av 100 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Dersom $El_x f(x) = 1$ og $El_x g(x) = 1$, så er $El_x \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) > 0$.

Svar:

$$El_x \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = El_x(f(x)) - El_x(g(x)) = 1 - 1 = 0$$

Så påstanden er usann.

---

b) $\ln(e^x) = e^{\ln(x)}$

Svar:

Vi har

$$\ln(e^x) = x\ln(e) = x$$

Ifølge definisjonen til den naturlige logaritmen har vi

$$e^{\ln(x)} = x$$

Så

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}$$

Ergo er påstanden er sann.

c) Funksjonen $U(x,y) = c \cdot (a_1 x^\alpha + a_2 y^\alpha)^{\gamma/\alpha}$ er homogen av grad γ/α.

Svar:

Undersøker om funksjonen er homogen:

$$U(tx,ty) = c(a_1(tx)^\alpha + a_2(ty)\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}} = c(t^\alpha(a_1x^\alpha + a_2y\alpha))^{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

$$= t^\gamma c(a_1x^\alpha + a_2y\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}} = t^\gamma U(x,y)$$

Funksjonen homogen av grad γ.

Ergo er påstanden usann.

---

d) Dersom $f''(x) = 0$ i hele definisjonsområde vil $f'(x)$ være konstant.

Svar:

$f''(x)$ er den deriverte av $f'(x)$. Siden den deriverte av $f'(x)$ er null, er $f'(x)$ uendret for alle x.

Ergo er påstanden sann.

e) Anta at funksjonene $g(x)$ og $h(x)$ er to ganger deriverbare, og at x_0 er et indre punkt i definisjonsmengdene. Anta videre at $g(x)$ er i et globalt maksimum når $x = x_0$, og at $h(x)$ er i et globalt minimum når $x = x_0$. Da er $z(x) = g(x) - h(x)$ i et globalt maksimum når $x = x_0$.

Svar:

Siden $g(x)$ er i et globalt maksimum og $h(x)$ er i et globalt minimum når $x = x_0$, har vi

$$g'(x_0) = 0$$

$$g''(x) < 0 \text{ for alle } x \text{ i definisjonsmengden}$$

$$h'(x_0) = 0$$

$$h''(x) > 0 \text{ for alle } x \text{ i definisjonsmengden}$$

Da får vi også

$$z'(x_0) = \underbrace{g'(x_0)}_{=0} - \underbrace{h'(x_0)}_{=0} = 0$$

og

$$z''(x) = \underbrace{g''(x)}_{<0} - \underbrace{h''(x)}_{>0} < 0$$

Ergo er funksjonen $z(x)$ i et globalt maksimum når $x = x_0$.

- Oppgaven kan også løses ved å bruke definisjonen av globale ekstrempunkter direkte:

Siden $g(x)$ er i et globalt maksimum og $h(x)$ er i et globalt minimum vet vi at:

$$g(x) \leq g(x_0) \text{ for alle } x \text{ i definisjonsmengden}$$

$$h(x) \geq h(x_0) \text{ for alle } x \text{ i definisjonsmengden}$$

Da har vi at

$$z(x) = g(x) - h(x) \leq g(x_0) - h(x_0) = z(x_0) \text{ for alle } x \text{ i definisjonsmengden}$$

Ergo er $x = x_0$ et globalt maksimum for $z(x)$.

Påstanden er <u>sann</u>

Oppgave 3 av 5 (12,5 av 100 poeng)

a) Finn differensialet til $f(x) = \sum_{n=3}^{5} g(nx)$

<u>*Svar:*</u> Løser ut summetegnet:

$$f(x) = \sum_{n=3}^{5} g(nx) = g(3x) + g(4x) + g(5x)$$

Tar differensialet:

$$df = 3g'(3x)dx + 4g'(4x)dx + 5g'(5x)dx$$

Dersom kandidaten ikke har satt inn $3x$, $4x$ eller $5x$ i $g'(\cdot)$ gis det mindre trekk i uttellingen.

---

b) La $z(x) = x^\alpha$ være definert for $x > 0$. For hvilke verdier av α er $z(x)$ konkav? Begrunn svaret ditt.

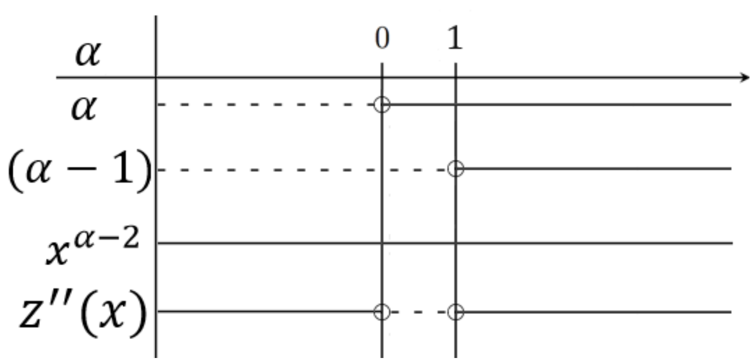
<u>*Svar:*</u>

$z(x)$ er konkav så lenge $z''(x) \leq 0$. Finner $z''(x)$:

$$z'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$z''(x) = (\alpha - 1)\alpha x^{\alpha-2}$$

Siden $x > 0$ ser vi at $z''(x) \leq 0$ dersom $0 \leq \alpha \leq 1$. Vi kan også vise dette ved å bruke et fortegnsdiagram:



---

c) Finn den deriverte av nivåkurven $y(x)$ definert ved likningen $f(x \cdot g(y)) = c$, der $f'(x \cdot g(y)) \neq 0$, $g'(y) \neq 0$, og c er en konstant [1].

Svar:

Deriverer gjennom $f(xg(y(x))) = c$ mhp. x:

$$f'(xg(y(x)))\left[g(y) + xg'(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0$$

Deler på $f'(xg(y))$ (som ikke er lik null):

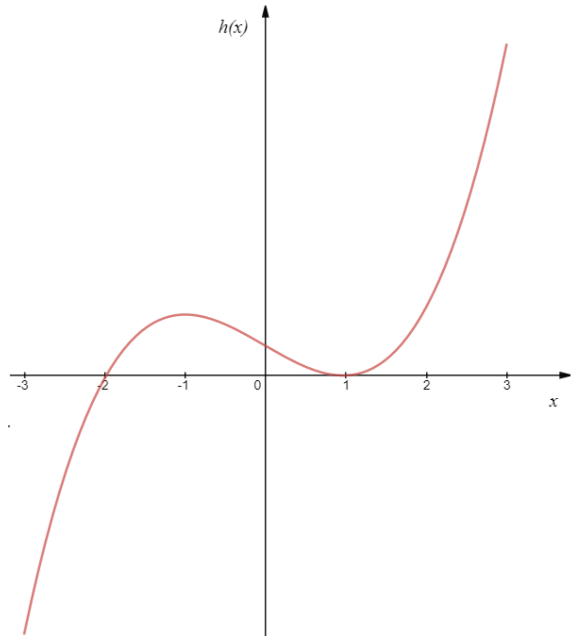
$$g(y) + xg'(y)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{g(y)}{xg'(y)}$$

[1] Merk at $\cdot$ i uttrykket $f(x \cdot g(y)) = c$ er et gangetegn.

Oppgave 4 av 5 (12.5 av 100 poeng)

Betrakt funksjonen $h(x)$ definert i intervallet $-3 \leq x \leq 3$ gjengitt i figuren under. I oppgavene nedenfor skal du finne verdier og intervaller for x ved å se på figuren.



a) For hvilke x er $h(x)$ stigende, og for hvilke x er $h(x)$ fallende.

Svar:

Vi ser at $h(x)$ er stigende når $-3 \leq x \leq -1$ og når $1 \leq x \leq 3$, og at $h(x)$ er fallende når $-1 \leq x \leq 1$

---

b) Finn stasjonærpunktene til $h(x)$.

Svar:

Vi ser at $h(x)$ er i et stasjonærpunkt når $x = -1$ og når $x = 1$.

---

c) For hvilke x er $h(x)$ konveks, og for hvilke x er $h(x)$ konkav?

Svar:

Vi ser at $h(x)$ er konkav når $-3 \leq x \leq 0$ og konveks når $0 \leq x \leq 3$.

---

d) Finn og klassifiser de lokale og de globale ekstrempunktene til $h(x)$.

Svar:

Funksjonen har fire lokale ekstrempunkter.

- Lokale minimumspunkter:

$$x_1 = -3$$

$$x_3 = 1$$

- Lokale maksimumspunkter:

$$x_2 = -1$$

$$x_4 = 3$$

Det er hjørneløsningene som er de *globale* ekstrempunktene:

- $x_1 = -3$ er det globale minimumspunktet
- $x_4 = 3$ er det globale maksimumspunktet.

Oppgave 5 av 5 (30 av 100 poeng)

Betrakt maksimeringsproblemet

$$\max_{x,y} (\ln(x) + y) \quad \text{gitt at} \quad x + g(y) = m$$

der $g(y)$ er en strengt stigende og strengt konveks funksjon, og $m > 0$ er en konstant.

a) Sett opp Lagrangefunksjonen, finn førsteordensbetingelsene, og vis at $x = g'(y)$ i optimum.

Svar:

$$\mathcal{L}(x, y) = \ln(x) + y - \lambda(x + g(y) - m)$$

FOB:

$$\mathcal{L}'_x(x, y) = \frac{1}{x} - \lambda = 0$$
$$\mathcal{L}'_y(x, y) = 1 - \lambda g'(y) = 0$$

Setter sammen:

$$1 = \frac{g'(y)}{x} \Rightarrow x = g'(y)$$

---

b) Sett inn for x i bibetingelsen, og vis at y implisitt defineres som en funksjon av m. Finn ut om y økes eller reduseres når m økes.

Svar:

$$g'(y) + g(y) = m$$

Definerer $y(m)$:

$$g'(y(m)) + g(y(m)) = m$$

Deriverer gjennom mhp. m:

$$g''(y)\frac{\partial y}{\partial m} + g'(y)\frac{\partial y}{\partial m} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial m} = \frac{1}{g''(y) + g'(y)} > 0$$

Konklusjon: Når m økes fører det til en økning i x.

---

c) Sett in $y = y(m)$ i uttrykket $x = g'(y)$, og finn ut om x økes eller reduseres når m økes.

Svar:

$x = g'(y(m))$ definerer implisitt $x(m)$:

$$x(m) = g'(y(m)) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial m} = \underbrace{g''(y)}_{>0} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial m}}_{>0} > 0$$

Anta fra nå at $g(y) = e^y$

d) Vis at $y^*(m) = \ln(\frac{m}{2})$ i optimum, og finn $x^*(m)$. Du kan enten bruke det du fant i **a)**–**c)**, eller sette opp Lagrange-problemet på nytt.

Svar:

Vi har allerede at $g'(y) + g(y) = m$, setter inn for $g(y)$ og $g'(y)$:

$$e^y + e^y = m \Rightarrow 2e^y = m$$

$$\Rightarrow y^*(m) = \ln\left(\frac{m}{2}\right)$$

Setter inn $y^*(m)$ i $x = g'(y) = e^y$

$$x^*(m) = e^{\ln\left(\frac{m}{2}\right)} = \frac{m}{2}$$