

Sensorveiledning

Høst 2021

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 6) (20 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x} + 1$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^{-3}e^{3x}$

c) $x(p, q) = \frac{m}{u+v}$, der $u = p^2$ og $v = q^2 - p$, og m er en konstant

d) $F(x, y) = \frac{xe^{b(x,y)}}{y}$, der $b(x, y)$ er en generell (ukjent) funksjon av x og y .

Svar:

a) $f'(x) = 4x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = -x^{-4}e^{3x} + x^{-3}e^{3x} = x^{-3}e^{3x}(1 - x^{-1}) = \frac{e^{3x}(x-1)}{x^4}$

c) Denne kan løses enten ved bruk av kjerneregelen (totalderivasjon) eller innsetting. Løsningen blir

$$\begin{aligned}\frac{dx(p, q)}{dp} &= -\frac{m(2p-1)}{(p^2-p+q^2)^2} \\ \frac{dx(p, q)}{dq} &= -\frac{2mq}{(p^2-p+q^2)^2}\end{aligned}$$

d) Produktregel (evt. også kvotientregel) pluss kjerneregel:

$$\begin{aligned}F'_x(x, y) &= \frac{1}{y}e^{b(x,y)} + \frac{x}{y}b'_x(x, y)e^{b(x,y)} = \frac{1 + xb'_x(x, y)}{y}e^{b(x,y)} \\ F'_y(x, y) &= -\frac{x}{y^2}e^{b(x,y)} + \frac{x}{y^2}b'_y(x, y)e^{b(x,y)} = \frac{xyb'_y(x, y) - x}{y^2}e^{b(x,y)}\end{aligned}$$

Oppgave 2 (av 6) (20 av 100 poeng)
Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

- a) Den førstederiverte til en stigende funksjon $f(x)$ er selv en stigende funksjon.
- b) Den lineære approksimasjonen til $Y(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ rundt $(K_0, L_0) = (1, 1)$ er gitt ved
- $$Y(K, L) \approx \alpha AK + (1 - \alpha)AL$$
- c) $f(x) = x^4 - 3$ har et minimumspunkt når $x = 0$.
- d) $f(x) = \sqrt{x}$ har hverken et globalt minimumspunkt eller et globalt maksimumspunkt. (Hint: Sjekk definisjonsområdet til funksjonen.)

Svar:

- a) Usant.
Studentene kan enten komme med et eksempel på det motsatte (enhver kontinuerlig deriverbar stigende og konkav funksjon), eller forklare dette generelt: $f'(x) \geq 0$ når funksjonen er stigende. For at den deriverte skal være stigende må $f''(x) \geq 0$. Det holder hvis funksjonen er konveks. Funksjonen kan være både stigende ($f'(x) \geq 0$) og konkav ($f''(x) \leq 0$) på samme tid, dermed er påstanden usann.

- b) Sant.
Formelen for lineær approksimasjon av $f(x, y)$ rundt (x_0, y_0) er gitt ved

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Det gir

$$\begin{aligned} Y(1, 1) &= A \\ Y'_K(K, L) &= \alpha AK^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \frac{\alpha Y}{K} \\ Y'_L(K, L) &= (1 - \alpha) AK^\alpha L^{-\alpha} = \frac{(1 - \alpha) Y}{L} \\ Y'_K(1, 1) &= \alpha A \\ Y'_L(1, 1) &= (1 - \alpha) A \\ Y(K, L) &\approx A + \alpha A(K - 1) + (1 - \alpha) A(L - 1) = \alpha AK + (1 - \alpha) AL \end{aligned}$$

c) Sant.

Her må studentene først vise at $(0, f(0))$ tilfredsstiller førsteordensbetingelsen:

$$f'(x) = 4x^3 = 0$$

Deretter kan de vise at det er et minimumspunkt på flere måter (ikke-uttømmende liste):

- i) De kan vise med førstederiverttesten at $f'(x) \leq 0$ når $x \leq 0$ og $f'(x) \geq 0$ når $x \geq 0$, som impliserer at det er et maksimumspunkt
 - ii) De kan vise med andrederiverttesten at $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ for alle x , slik at funksjonen er globalt konveks og dermed har et minimumspunkt. Det gis *ikke* uttelling for dette steget til studenter som setter inn for 0 i den andrederiverte og finner $f''(0) = 0$, enten de konkluderer med at påstanden er sann eller usann.
 - iii) Studentene kan også tegne funksjonen og vise at den har et globalt minimum.
- d) Usant. $f(x)$ har et globalt minimum i $(0, 0)$ (hjørneløsning).
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ når $x > 0$. Førsteordensbetingelsen gir ingen stasjonærpunkt, og dermed ingen indre maksimums- eller minimumspunkter. Funksjonen er imidlertid ikke deriverbar når $x = 0$. Det er tilstrekkelig for å vise at $x = 0$ er en hjørneløsning at studentene poengterer at $x = 0$ er den første verdien i definisjonsmengden og at den deriverte er strengt positiv for alle x -verdier større enn 0. Andre fremgangsmåter kan også godkjennes, dersom de viser at det er en hjørneløsning.

Det er ikke tilstrekkelig å sette inn for ulike x -verdier i funksjonen for å vise at $(0, 0)$ er et globalt minimumspunkt. Det gis likevel noe uttelling til studenter som forstår at de må teste for hjørneløsninger, selv om de ikke har riktig fremgangsmåte. Studenter som finner punktet, men ikke kommer videre, bør også få uttelling for det.

Oppgave 3 (av 6) (10 av 100 poeng)

I denne oppgaven skal du tegne en skisse av en funksjon $f(x)$. Skissa trenger ikke være nøyaktig, men all informasjon som er listet opp under skal kunne leses ut av grafen.

Funksjonen karakteriseres på følgende måte:

- Funksjonen er definert i intervallet $x \in [-10, 10]$.
- Funksjonen har to stasjonærpunkt – ett globalt maksimumspunkt når $x = -2$ og ett ytterligere stasjonærpunkt når $x = 5$.
- Om $f'(x)$ vet vi følgende:
 - $f'(x) \geq 0$ når $x \leq -2$.
 - $f'(x) \leq 0$ når $x \geq -2$.

Svar: Mange ulike figurer kan godkjennes i denne oppgaven. De fleste vil antakelig være kontinuerlige, men det er ikke et krav. Det skal gis lik uttelling for hvert element som omfattes av besvarelsen:

- Grafen skal tegnes innenfor definisjonsområdet, som skal markeres på x-aksen
- $x = -2$ er et maksimumspunkt. Dette fremgår av tredje punkt, der fortegnet på den deriverte indikerer at førstederiverttesten for maksimum holder.
- $x = 5$ er et sadelpunkt (terrassepunkt/vendepunkt) der den andrederiverte bytter fortegn. Dette fremgår også av tredje punkt – den deriverte bytter ikke fortegn, selv om det er et stasjonærpunkt. Ergo må det være et vendepunkt.

Det er ikke forventet at studentene begrunner svaret sitt. Besvarelser som ikke inneholder en fullverdig figur, men likevel viser med tekst/utregning at de har forstått implikasjonene av punktene over, bør få noe (men ikke full) uttelling.

Oppgave 4 (av 6) (10 av 100 poeng)

Betrakt funksjonen $h(x) = x^{a(x)}$, der $a(x) = \ln(x) + 1$.

- Bestem definisjonsområdet
- Vis at $h'(x) = (2 \ln x + 1)x^{\ln x}$
- Finn $El_x h(x)$

Svar:

a) $a(x)$ er bare definert for $x > 0$. Dermed er definisjonsområdet til $h(x)$ $x \in (0, \infty)$.

b) Bruker logaritmisk derivasjon: $\ln(h(x)) = a(x) \ln(x)$ slik at

$$\begin{aligned}\frac{h'(x)}{h(x)} &= a'(x) \ln(x) + \frac{a(x)}{x} \\ h'(x) &= \left[\frac{\ln(x) + 1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right] x^{\ln(x)+1} \\ &= x^{\ln(x)} [2 \ln(x) + 1]\end{aligned}$$

c) Formelen for elastisitering er $El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}El_x h(x) &= \frac{x}{h(x)} h'(x) \\ &= \frac{x}{x^{\ln x + 1}} (2 \ln x + 1) x^{\ln x} = 2 \ln x + 1\end{aligned}$$

Oppgave 5 (av 6) (30 av 100 poeng)

a) Betrakt først følgende nyttefunksjon:

$$U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Vis at stigningstallet til nivåkurven $x_2(x_1)$ er

$$x_2'(x_1) = -\frac{x_2}{x_1}$$

b) Bestem om nivåkurven fra oppgave a) er konveks eller konkav.

Heretter generaliserer vi nyttefunksjonen, slik at den tar følgende form:

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\sigma} x_1^{1-\sigma} + \frac{1}{1-\sigma} x_2^{1-\sigma} \quad \text{der } \sigma \in (0, 1)$$

Anta at konsumenten maksimerer nytte gitt en budsjettbetingelse. Det gir følgende nyttemaksimeringsproblem (der $\sigma \in (0, 1)$):

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\sigma} x_1^{1-\sigma} + \frac{1}{1-\sigma} x_2^{1-\sigma} \quad \text{gitt at } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

- c) Sett opp Lagrange-problemet og finn førsteordensbetingelsene.
- d) Løs førsteordensbetingelsene for å finne etterspørselen etter x_1 og x_2 (dvs. finn $x_1^*(p_1, p_2, m)$ og $x_2^*(p_1, p_2, m)$). Du kan anta at stasjonærpunktet er et maksimumspunkt.
- e) Bruk det generelle omhyllingsteoremet til å finne $\frac{dU^*(x_1, x_2)}{dp_1}$, $\frac{dU^*(x_1, x_2)}{dp_2}$ og $\frac{dU^*(x_1, x_2)}{dm}$. Du kan oppgi disse som funksjoner av x_1^* , x_2^* og λ .

Svar:

- a) Definerer nivåkurven

$$\bar{u} = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Definerer $x_2 \equiv x_2(x_1)$ og deriverer mhp. x_1 på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} x_2'(x_1) &= \bar{u} \\ x_2'(x_1) &= -\frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Alternativt kan oppgaven løses eksplisitt, ved å løse nivåkurven for x_2 og derivere mhp. x_1 :

$$\begin{aligned} \ln(x_1 x_2) &= \bar{u} \\ x_1 x_2 &= e^{\bar{u}} \\ x_2 &= \frac{e^{\bar{u}}}{x_1} \\ x_2'(x_1) &= -\frac{e^{\bar{u}}}{x_1^2} \end{aligned}$$

Ved å sette inn for $e^{\bar{u}} = x_1 x_2$ gir det:

$$x_2'(x_1) = -\frac{x_1 x_2}{x_1^2} = -\frac{x_1}{x_2}$$

b) Tester ved bruk av den andrederiverte:

$$\begin{aligned} x_2''(x_1) &= -\frac{x_2'(x_1)x_1 - x_2}{x_1^2} \\ &= \frac{2x_2}{x_1^2} > 0 \end{aligned}$$

Noen studenter kan påpeke at fortegnet er positivt allerede på første linje. Det må godkjennes, dersom de viser hvorfor.

Eventuelt, løst eksplisitt:

$$x_2''(x_1) = \frac{2e^{\bar{u}}}{x^3} > 0$$

Dermed er nivåkurven konveks.

c) $\mathcal{L} = \frac{1}{1-\sigma}x_1^{1-\sigma} + \frac{1}{1-\sigma}x_2^{1-\sigma} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$
 FOB:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_1^{-\sigma} - \lambda p_1 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_2^{-\sigma} - \lambda p_2 = 0 \tag{2}$$

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \tag{3}$$

d) Kombinerer (1) og (2):

$$\begin{aligned} \frac{x_1^{-\sigma}}{x_2^{-\sigma}} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_1 &= \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} x_2 \end{aligned}$$

Setter inn i (3) og løser for x_2 :

$$p_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} x_2 + p_2 x_2 = m$$

$$x_2^*(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} + p_2} = \frac{m}{p_2 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + 1 \right)}$$

$$x_1^*(p_1, p_2, m) = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \frac{m}{p_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} + p_2} = \frac{m}{p_2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} + p_1} = \frac{m}{p_1 \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + 1 \right)}$$

Her bør det gis mye uttelling for alle riktige svar, selv om de ikke forkortes fullstendig. Samtidig bør studenter som enten har lyktes med å forkorte eller har innsett at problemet er symmetrisk få uttelling for dette.

e) $\frac{dU^*}{dp_1} = -\lambda x_1^*, \frac{dU^*}{dp_1} = -\lambda x_2^*$ og $\frac{dU^*}{dm} = \lambda$

Oppgave 6 (av 6) (10 av 100 poeng)

Betrakt følgende nyttemaksimeringsproblem¹ med én bibetingelse:

$$\max_{x_1, \dots, x_n} U(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1-\sigma} \sum_{i=1}^n x_i^{1-\sigma} \quad \text{gitt at} \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i = m$$

der $\sigma \in (0, 1)$.

- Sett opp Lagrange-problemet og finn førsteordensbetingelsene. (Hint: Her er det tilstrekkelig å finne én generell førsteordensbetingelse for x_i .)
- Anta at $p_i = p$ for alle i . Finn etterspørselen etter alle x_i (dvs. finn $x_i^*(p, m)$ for $i = 1, \dots, n$). Du kan anta at stasjonærpunktet er et maksimumspunkt.

Hint: Hvis det er nyttig i utregningen din kan du benytte følgende regneregler

1. Her har vi utvidet nyttemaksimeringsproblemet i forrige oppgave til et generelt tilfelle. I forrige oppgave var $n = 2$.

for summer:

$$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n c = cn \quad (5)$$

Med ord: (4) innebærer at konstantledd (som ikke avhenger av i) kan trekkes utenfor summen. (5) innebærer at en sum av konstantledd er konstantleddet multiplisert med n .

Svar:

a) $\mathcal{L} = \frac{1}{1-\sigma} \sum_{i=1}^n x_i^{1-\sigma} - \lambda (\sum_{i=1}^n p_i x_i - m)$ gir FOB

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = x_i^{-\sigma} - \lambda p_i = 0 \quad (6)$$

$$m = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (7)$$

Noen studenter kan skrive ut summen og finne førsteordensbetingelsene for n variabler. Det bør godkjennes. Det bør være toleranse for upresis notasjon, så lenge det fremkommer at studentene har forstått hva problemet innebærer.

Generelt bør det i oppgave 6 utvises forståelse for at studentene ikke er drevne i generell notasjon, og at det er evnen til å forstå notasjonen og maksimere over n variabler som testes i denne oppgaven (ikke hvor effektiv studentenes notasjon er).

b) FOB blir nå:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = x_i^{-\sigma} - \lambda p = 0 \quad (8)$$

$$m = p \sum_{i=1}^n x_i \quad (9)$$

(8) impliserer at $x_i^* = (\lambda p)^{-\frac{1}{\sigma}}$. Her kan studentene enten innse (og påpeke) at dette betyr at løsningen må bli symmetrisk:

$$x_i = \frac{m}{np}$$

eller løse FOB for to vilkårlige i :

$$\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{-\sigma} = \frac{p}{p} = 1$$
$$x_i = x_j$$

som gir samme konklusjon.
