

Sensorveiledning

Høst 2022

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 5) (20 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = x^3 - 3x^4 + 2\sqrt{x} - 4$

b) $g(z) = \frac{z^4}{2a(z)}$, der $a(z) > 0$ er en generell funksjon

c) $h(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x - y)$

d) $d(p, q) = x^2 + cm(y)$, der $x(p, q) = -2p + q$ og $y(p, q) = 15 + p - 2q$. Merk at c er en konstant og $m(y)$ er en generell funksjon.

Svar:

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $g'(z) = \frac{4z^3 a(z) - z^4 a'(z)}{2(a(z))^2}$

c)

$$\begin{aligned} h'_x &= 2x \ln(x - y) + \frac{x^2 - y^2}{x - y} \\ &= 2x \ln(x - y) + x + y \\ h'_y &= -2y \ln(x - y) - \frac{x^2 - y^2}{x - y} \\ &= -2y \ln(x - y) - x - y \end{aligned}$$

d) $d'_p = -4x + cm'(y) = -4(-2p + 1) + cm'(15 + p - 2q)$
 $d'_q = 2x - 2cm'(y) = 2(-2p + q) - 2cm'(15 + p - 2q)$

Oppgave 2 (av 5) (20 av 100 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) $\sum_{i=1}^5 a = 32$ hvis $a = 8$

b) Problemet

$$\max_{x_1, x_2} x_1^\gamma + x_2^\gamma \quad \text{gitt at} \quad g(x_1, x_2) = m$$

har et stasjonærpunkt der $x_1^* = x_2^*$ dersom $g'_{x_1}(x_1, x_2) = g'_{x_2}(x_1, x_2)$.

c) Betrakt maksimeringsproblemet

$$\max_x f(x) \quad \text{gitt at} \quad x = a$$

Løsningen på problemet er $x^* = a$.

d) Nivåkurvene $K(L)$ til $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ (definert når $K, L > 0$) er stigende hvis $\alpha \in (0, 1)$.

Svar:

a) Usant. $\sum_{i=1}^5 a = 5a$. Likheten holder hvis (og bare hvis) $a = 6$.

b) Sant. Setter først opp Lagrange-funksjonen: $\mathcal{L}(x_1, x_2) = x_1^\gamma + x_2^\gamma - \lambda(g(x_1, x_2) - m)$.
Finner deretter førsteordensbetingelsene, og deler på hverandre:

$$\{x_1\} \quad \gamma x_1^{\gamma-1} = \lambda g'_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$\{x_2\} \quad \gamma x_2^{\gamma-1} = \lambda g'_{x_2}(x_1, x_2)$$

$$\frac{x_1^{\gamma-1}}{x_2^{\gamma-1}} = \frac{g'_{x_1}(x_1, x_2)}{g'_{x_2}(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{x_1^{\gamma-1}}{x_2^{\gamma-1}} = 1$$

$$x_1^* = x_2^*$$

c) Sant. Bibetingelsen er bindende, og det eneste punktet der bibetingelsen holder er i $x = a$. Det finnes ingen x -verdi som tilfredsstiller bibetingelsen og gir $f(x)$ en høyere verdi, og dette punktet må derfor løse problemet.

- d) Usant – den er avtakende hvis $\alpha \in (0, 1)$. Problemet må løses ved implisitt derivasjon – enten som det som følger under, eller ved å benytte seg av formelen for implisitt derivasjon langs en nivåkurve (**sett inn her**).

$$\begin{aligned}
 AK^\alpha L^{1-\alpha} &= \bar{Y} \\
 AK(L)^\alpha L^{1-\alpha} &= \bar{Y} \\
 A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} K'(L) + A(1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} &= 0 \\
 K'(L) &= \underbrace{-}_{<0} \underbrace{\frac{1-\alpha}{\alpha}}_{>0 \text{ når } \alpha \in (0,1)} \underbrace{\frac{K}{L}}_{>0} < 0
 \end{aligned}$$

der den siste ulikheten følger av definisjonsområdet, $K, L > 0$.

Oppgave 3 (av 5) (20 av 100 poeng)

Betrakt følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (x-1)^2 - 6x$$

- a) For hvilke x er $f(x)$ voksende, og for hvilke x er funksjonen avtakende? (*Hint:* Bruk andregradsformelen/ABC-formelen til å faktorisere $f'(x)$.)
- b) For hvilke x er $f(x)$ konveks, og for hvilke x er funksjonen konkav?
- c) Finn funksjonens stasjonærpunkt og klassifiser dem. Er eventuelle ekstrempunkt lokale eller globale?
- d) Tegn en skisse av funksjonen. Skissen trenger ikke være nøyaktig, men egenskapene du har funnet i deloppgavene over skal fremgå.

Svar:

- a) Den førstederiverte er gitt ved $f'(x) = x^2 + 2x - 8$. Bruker en andregradslikning til å faktorisere den førstederiverte, $f'(x) = (x+4)(x-2)$, og sjekker deretter fortegnet.

$$f'(x) \geq 0 \text{ og funksjonen er stigende når } x \leq -4 \text{ eller } x \geq 2.$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ og funksjonen er avtakende når } x \in [-4, 2].$$

- b) Den andrederiverte er gitt ved $f''(x) = 2x + 2$.

$$f''(x) \geq 0 \text{ og funksjonen er konveks når } x \geq -1$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ og funksjonen er konkav når } x \leq -1$$

- c) FOB: Setter den førstederiverte lik null: $f'(x) = x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$ og finner to stasjonærpunkt, $x_1 = -4$ og $x_2 = 2$.

AOB: Sjekker den andrederiverte i punktene:

$$f''(-4) = -6 < 0, \text{ slik at } x_1 \text{ er et lokalt maksimumspunkt}$$

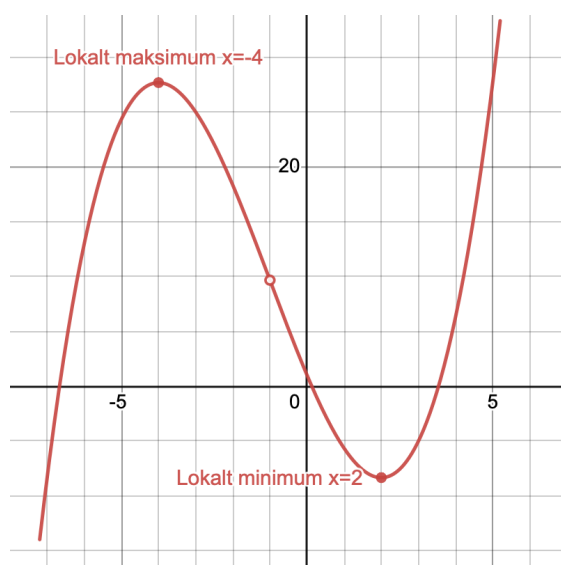
$$f''(2) = 6 > 0, \text{ slik at } x_2 \text{ er et lokalt minimumspunkt}$$

Alternativt kan studentene vise til svaret i oppgave b), og fastslå at når funksjonen er strengt konkav i intervallet $x \in (-\infty, -1)$ må $x_1 = -4$ være et lokalt maksimumspunkt fordi den ligger i dette intervallet. Tilsvarende må $x_2 = 2$ være et lokalt minimumspunkt fordi funksjonen er strengt konveks i intervallet $x \in (-1, \infty)$.

d) I denne oppgaven vektlegges studentenes evne til å tolke egenskapene de har funnet tidligere i oppgaven grafisk. Det er altså ikke forventet at tegningen er nøyaktig, eller at studentene finner funksjonsverdien i noe punkt. Det gis uttelling for at skissa inneholder følgende:

- stigende når $x \leq -4$ og $x \geq 2$
avtakende når $x \in [-4, 2]$
- konveks når $x \geq -1$
konkav når $x \leq -1$
vendepunkt når $x = -1$
- Lokalt maksimum i $x = 4$ og lokalt minimum i $x = 2$.

I bildet under er grafen plottet i intervallet $-7.2 \leq x \leq 5.2$.



Oppgave 4 (av 5) (20 av 100 poeng)

- a) Er nyttefunksjonen $u(c_1, c_2) = (c_1^\beta + c_2^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ homogen? Av hvilken grad?
- b) La $F(x, y) = (xy)^{xy}$ være definert for $x, y > 0$.
- i) Vis at

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= y(xy)^{xy}(\ln(x) + \ln(y) + 1) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= x(xy)^{xy}(\ln(x) + \ln(y) + 1)\end{aligned}$$

- ii) Finn den lineære approksimasjonen til $F(x, y)$ rundt punktet $(1, 1)$.
- c) Anta at $f(x) = g(u(x))$, og $u \equiv u(x)$. Vis at følgende holder:

$$El_x f(x) = El_u g(u) El_x u(x)$$

Hint: $El_x f(x)$ kan skrives om til et uttrykk som inneholder g og u .

Svar:

- a) $u(tc_1, tc_2) = ((tc_1)^\beta + (tc_2)^\beta)^{\frac{1}{\beta}} = tu(c_1, c_2)$. Homogen av grad 1.
- b) i) Bruker logaritmisk derivasjon:

$$\begin{aligned}\ln F(x, y) &= \ln(xy)^{xy} \\ &= xy(\ln x + \ln y) \\ \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{F(x, y)} &= y(\ln x + \ln y) + \frac{xy}{x} = y(\ln x + \ln y + 1) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= y(xy)^{xy}(\ln x + \ln y + 1) \\ \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{F(x, y)} &= x(\ln x + \ln y) + \frac{xy}{y} = x(\ln x + \ln y + 1) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= x(xy)^{xy}(\ln x + \ln y + 1)\end{aligned}$$

- ii) Formelen for lineær approksimasjon er $F(x, y) \approx F(x_0, y_0) + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. Bruker de deriverte fra oppgave b) i) og finner verdiene når $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$F(x_0, y_0) = 1$$

$$F'_x(x_0, y_0) = 1$$

$$F'_y(x_0, y_0) = 1$$

$$F(x, y) \approx 1 + (x - 1) + (y - 1) = x + y - 1$$

Studenter som ikke husker at $\ln 1 = 0$ bør likevel få god uttelling for denne oppgaven.

- c) Dette er kjerneregelen for elastisiteter. Må bruke kjerneregelen til å finne $f'(x) = g'(u)u'(x)$ og deretter omorganisere formelen for elastisiteter:

$$\begin{aligned} El_x f(x) &= \frac{x}{f(x)} f'(x) \\ &= \frac{x}{f(x)} g'(u) u'(x) \\ &= \frac{x}{g(u(x))} g'(u) u'(x) \frac{u}{u(x)} \\ &= \underbrace{\frac{u}{g(u)}}_{El_u g(u)} \underbrace{\frac{x}{u(x)}}_{El_x u(x)} \end{aligned}$$

Merk at studentene har forholdsvis lite trening i bevis, og ikke har blitt grundig drillet i dette. Det er derfor en forholdsvis vanskelig oppgave. Beviset er imidlertid gjennomgått i forelesning, og står i pensumboka.

Oppgave 5 (av 5) (20 av 100 poeng)

Et land har behov for X enheter energi, som kan komme fra enten fossil energi (x_1) eller fornybar energi (x_2). Landet ønsker å minimere sine energikostnader, og dersom det produserer like mye fornybar som fossil energi, er det alltid dyrere å øke produksjonen av fornybar energi, slik at $c_1 < c_2$ (der $c_1, c_2 > 0$). Det gir følgende kostnadsminimeringsproblem:

$$\min_{x_1, x_2} C(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \quad \text{gitt at} \quad x_1 + x_2 = X \quad (1)$$

- a) Sett opp Lagrange-problemet og finn førsteordensbetingelsene.
- b)
 - i) Finn landets optimale produksjon av fossil og fornybar energi, x_1^* og x_2^* .
 - ii) Produserer landet mest fossil eller mest fornybar energi?
- c) Hvordan endres kostnadene $C(x_1^*, x_2^*)$ hvis landet øker energiforbruket X ? Du kan enten oppgi svaret som funksjon av λ , eller av parameterne i modellen (c_1 , c_2 og X). (*Hint*: Hva er $\frac{dC(x_1^*, x_2^*)}{dX}$? Bruk det generelle omhyllingsteoremet.)
- d) Produksjon av fossil energi medfører klimagassutslipp, som fører til skade på det globale klimaet. Dersom landet tar inn over seg denne kostnaden, tar kostnadsfunksjonen i (1) følgende form:

$$\tilde{C}(x_1, x_2) = (c_1 + b)x_1^2 + c_2 x_2^2$$

Hvor stor må b være for at landet nå skal velge å produsere mer fornybar energi (x_2) enn fossil energi (x_1)?

Svar:

- a) Lagrange-problemet og FOB:

$$\min_{x_1, x_2} \mathcal{L}(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 - \lambda(x_1 + x_2 - X) \quad (2)$$

FOB:

$$\{x_1\} \quad 2c_1 x_1 = \lambda \quad (3)$$

$$\{x_2\} \quad 2c_2 x_2 = \lambda \quad (4)$$

$$\{BB\} \quad x_1 + x_2 = X \quad (5)$$

b) Setter likning (3) lik (4), og løser for $x_2 = \frac{c_1}{c_2}x_1$. Setter inn i (5) og får

$$x_1^* = \frac{1}{\frac{c_1}{c_2} + 1}X = \frac{c_2}{c_1 + c_2}X$$

$$x_2^* = \frac{1}{\frac{c_2}{c_1} + 1}X = \frac{c_1}{c_1 + c_2}X$$

$\frac{c_2}{c_1 + c_2}X < \frac{c_1}{c_1 + c_2}X$ når $c_2 < c_1$. Dermed er $x_1^* < x_2^*$ og landet produserer mest fossil energi.

Noen studenter vil bruke $x_2 = \frac{c_1}{c_2}x_1$ til å finne en løsning for den andre variabelen, her x_2^* . Andre vil påpeke at problemet i (1) er symmetrisk for x_1 og x_2 , og deretter oppgi til x_2^* som symmetrisk for x_1^* . Det er tilstrekkelig, så lenge dette gjøres eksplisitt. Studenter som ikke oppgir begrunnelse eller viser utregning skal kun få uttelling for å ha løst for én av variablene.

c) Her skal studentene bruke det generelle omhyllingsteoremet: $\frac{dC(x_1^*, x_2^*)}{dX} = \frac{\partial \mathcal{L}(x_1^*, x_2^*)}{\partial X} = \lambda$.

d) (3) blir nå $2(c_1 + b) = \lambda$. Dermed blir

$$x_1^* = \frac{c_2}{c_1 + b + c_2}X$$

$$x_2^* = \frac{c_1 + b}{c_1 + b + c_2}X$$

slik at $x_1^* < x_2^*$ hvis $c_2 < c_1 + b$, altså $b > c_2 - c_1$. Studentene kan også vise til FOB, og relasjonen mellom x_1^* og x_2^* : $x_1^* = \frac{c_2}{c_1 + b}x_2^*$, og få samme resultat.