

Sensorveiledning

Høst 2023

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 5) (15 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $e(x, y) = 3x^2 + 2x + 3xy$

b) $f(z) = e^{2z}5^z$

c) $g(x) = \frac{x^2-3x}{x} + 2x$

d) $h(p, q) = k(p)q + 3q^2p$, der $k(p)$ er en generell funksjon.

Svar:

a) $e'_x = 6x + 2 + 3y$

$$e'_y = 3x$$

b) $f'(z) = \ln(5)5^ze^{2z} + 5^ze^{2z}2 = e^{2z}5^z(2 + \ln 5)$

c) $g'(x) = \frac{(2x-3)x-(x^2-3x)1}{x^2} + 2 = 3$

Alternativt kan man forenkle funksjonen før derivasjon til $3x-9$ og få samme resultat

d) $h'_p = k'(p)q + 3q^2$

$$h'_q = k(p) + 6qp$$

Oppgave 2 (av 5) (25 av 100 poeng)

Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

- a) Den lineære approksimasjonen for funksjonen $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ rundt punktet $(1, 2)$ er $6x - 2y - 1$
- b) $f(x) = e^{x^2}$ har en invers gitt ved $g(y) = \sqrt{\ln(y)}$
- c) Verdimengden til funksjonen $f(x) = \ln(x)$ kan aldri bli negativ.
- d) Et stasjonærpunkt er det samme som et ekstrempunkt
- e) Helningen $(y'(x))$ til nivåkurven definert ved $x^2 - 2y^2 = u$ er $\frac{x}{y}$
- f) Funksjonen $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ har ingen ekstrempunkter
- g) Uttrykket $\frac{y^3x-y}{x-2(xy)^2}$ utgjør $\frac{dy}{dx}$ for den implisitte funksjonen $\ln(xy) = xy^2$

Svar:

- a) $f(x, y) \approx f(x_1, y_1) + f'_x(x_1, y_1)(x - x_1) + f'_y(x_1, y_1)(y - y_1)$
 $f'_x = 2x + 2y, f'_y = 2x - 2y, f'_x(1, 2) = 2(1) + 2(2) = 6, f'_y(1, 2) = 2(1) - 2(2) = -2$
 $f(1, 2) = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2^2 = 1 + 4 - 4 = 1$
 $f(x, y) \approx 1 + 6(x - 1) - 2(y - 2) = 6x - 2y - 1$
påstanden er sann
- b) Den deriverte av funksjonen er $f'(x) = e^{x^2}2x$. Altså er funksjonen verken strengt voksende eller avtakende, dermed har den ikke en invers. Påstanden er usann.
- c) $\ln(x)$ er negativ for $x \in (0, 1)$, påstanden er usann.

d) Et stasjonærpunkt er et punkt som tilfredsstiller førsteordensbetingelsen(e), men punktet trenger ikke være maks/min. Ekstrempunkt er funksjonens topp eller bunnpunkt. Påstanden er usann.

e) Helningen til en nivåkurve er gitt ved $y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{-4x} = \frac{x}{2y}$. Påstanden er altså usann. Her kan man komme til mål ved å enten kunne formelen over som vist på forelesning, eller definere y som en funksjon av x og derivere igjennom og løse for $y'(x)$.

f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ har ingen *indre* ekstrempunkter. Dette kan vises ved å sette opp førsteordensbetingelsen. Men ettersom funksjonen har et delvis lukket definisjonsområde og den deriverte er strengt positiv i definisjonsområdet, $x \in [0, \infty)$, har funksjonen en hjørneløsning i form av et globalt minimumspunkt i $x = 0$.

g) Definerer y som en funksjon av x og deriverer igjennom mhp. x:

$$\frac{1}{xy}(y + xy'(x)) = y^2 + 2yy'(x)x$$

$$y + xy'(x) = y^3x - 2(xy)^2y'(x)$$

$$y'(x)(x - 2(xy)^2) = y^3x - y$$

$$y'(x) = \frac{y^3x - y}{x - (2xy)^2}$$

Påstanden er sann

Oppgave 3 (av 5) (20 av 100 poeng)

En matematiker ønsker å finne eventuelle maksimums- og minimumspunkter for funksjonen gitt ved $f(x, y) = x^2 + y^3$ gitt bibetingelsen $x + \frac{y^2}{2} = 0$

- a) Sett opp Lagrange-funksjonen til problemet og finn de tilhørende førsteordensbetingelsene
- b) Løs problemet og finn eventuelle ekstrepunkter
- c) Bestem hvilke av stasjonærpunktene som gir høyest og lavest funksjonsverdi

Svar:

- a) Lagrange-likningen blir:

$$L = x^2 + y^3 - \lambda(x + \frac{y^2}{2})$$

Med tilhørende førsteordensbetingelser:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3y^2 - \frac{2y\lambda}{2} = 0$$

- b) Kombinerer FOBs og løser for x :

$$\lambda = 2x = \frac{3y^2}{y} = 3y \implies x = \frac{3y}{2}$$

Setter inn i bibetingelsen og får:

$$\frac{3y}{2} + \frac{y^2}{2} = 0$$

$$\implies 3y + y^2 = 0 \implies y(y + 3) = 0$$

To løsningskandidater $y = 0$ eller $y = -3$

$x = \frac{3y}{2}$, dermed har vi punktene

$(0, 0)$ og $(\frac{-9}{2}, -3)$ som løsninger.

- c) Setter inn punktene i funksjonen:

$$f(0, 0) = 0^2 + 0^3 = 0$$

$$f\left(\frac{-9}{2}, -3\right) = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + (-3)^3 = \frac{-81}{4} - 27 = -6.75 < 0$$

Av stasjonærpunktene gir $(0, 0)$ høyest funksjonsverdi og $\left(\frac{-9}{2}, -3\right)$ lavest funksjonsverdi.

Det viser seg at ingen av disse punktene er ekstrepunkter, og oppgaven er derfor formulert slik den er, altså at man løser for "eventuelle" ekstrepunkter. Studentene har ikke lært andreordensbetingelsen for maksimering under bibetingelser i dette faget.

Oppgave 4 (av 5) (20 av 100 poeng)

Gitt funksjonen $h(x) = 3x^2 - 4x + 1$

- a) I hvilke intervaller er funksjonen voksende og avtakende?
- b) Hva er funksjonens nullpunkter?
- c) Finn en formel for funksjonens tangent i punktet $(2, f(2))$

Svar:

- a) $f'(x) = 6x - 4$. Dermed har vi at $6x - 4 \geq 0$ for $x \in [\frac{2}{3}, \infty)$ og $6x - 4 \leq 0$ for $x \in (-\infty, \frac{2}{3}]$.

- b) Løser med ABC-formelen: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{4}{6} + \frac{\sqrt{4}}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{4}{6} - \frac{\sqrt{4}}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- c) Finner helningen i punktet: $f'(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 8$

$$\text{Finner } f(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$$

Bruker formelen $y - y_1 = a(x - x_1)$

$$y = 8(x - 2) + 5 = 8x - 16 + 5 = 8x - 11$$

Oppgave 5 (av 5) (20 av 100 poeng)

Betrakt funksjonen $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x$

- a) Finn eventuelle stasjonærpunkter for funksjonen
- b) Klassifiser løsningen(e) du har funnet ved å bruke andreordensbetingelsen

Svar:

a)
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6xy = 0\end{aligned}$$

fra den andre likningen har vi enten $x = 0$ eller $y = 0$.

Setter inn i første likning:

Case 1: $x = 0$:

$$3 \cdot 0^2 - 3y^2 + 1 = 0 \implies y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Dette gir stasjonærpunkter: $(0, \sqrt{\frac{1}{3}})$ og $(0, -\sqrt{\frac{1}{3}})$

Case 2: $y = 0$:

$$3x^2 - 3 \cdot 0^2(-3x) + 1 = 0 \implies 3x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -\frac{1}{3}$$

Case 2 er dermed ingen løsning.

- b) Bruker AOB for lokale ekstremalpunkter til å klassifisere punktene $(0, \sqrt{\frac{1}{3}})$ og $(0, -\sqrt{\frac{1}{3}})$:

$$f''_{xx} = 6x$$

$$f''_{yy} = -6x$$

$$f''_{xy} = -6y$$

For punktet $(0, \sqrt{\frac{1}{3}})$ får vi:

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0 \cdot 0 - (-6^2(\sqrt{\frac{1}{3}})^2) = -(36\frac{1}{3}) < 0$$

Sadelpunkt

Sjekker punktet $(0, -\sqrt{\frac{1}{3}})$:

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0 \cdot 0 - (6^2(-\sqrt{\frac{1}{3}})^2) = -(36\frac{1}{3}) < 0$$

Sadelpunkt
