ECON1100 Eksamen Høsten 2024 – Sensorveiledning

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, må utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 5) (15 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle variabler:

a) $h(x, y) = 4x^3 + 5y^2 - 6xy$

b) $q(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y}}$

c) $p(u, v) = v^2u + \ln(u)v^3$, der $ln(u)$ er den naturlige logaritmen av u.

Svar:

a)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 12x^2 - 6y$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = 10y - 6x$$

b)

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{y^3}}$$

c)

$$\frac{\partial p}{\partial u} = v^2 + \frac{1}{u}v^3$$
$$\frac{\partial p}{\partial v} = 2vu + 3v^2\ln(u)$$

Oppgave 2 (av 5) (25 av 100 poeng)

Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Den lineære approksimasjonen for funksjonen $f(x,y) = y^2 - 3xy + 4x$ rundt punktet $(2,1)$ er $-2x + 3y + 4$.

b) $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ er kun definert for $x \in (0,\infty)$.

c) Funksjonen $y = \ln(x)$ har ikke et globalt minimum.

d) Helningen til tangenten til nivåkurven definert ved $x^2 + y^2 = 4$ i punktet (x,y) er $-\frac{x}{y}$.

e) Funksjonen $p(x) = x^{\frac{2}{3}}$ har et vendepunkt i $x = 0$.

Sant:

a) Usant. Den lineære approksimasjonen er gitt ved
$$f(x,y) \approx f(2,1) + f_x'(2,1)(x-2) + f_y'(2,1)(y-1)$$
Først finner vi f_x' og f_y':
$$f_x' = -3y + 4, \qquad f_y' = 2y - 3x$$
Evaluert ved $(2,1)$:
$$f_x'(2,1) = -3(1) + 4 = 1, \qquad f_y'(2,1) = 2(1) - 3(2) = -4$$
Evaluerer også $f(x,y)$ i $(2,1)$: $f(2,1) = 1^2 - 3(2)(1) + 4(2) = 1 - 6 + 8 = 3$.
Dermed:
$$f(x,y) \approx 3 + 1(x-2) - 4(y-1) = 3 + x - 2 - 4y + 4 = x - 4y + 5$$

b) Sant. Nevneren er definert for alle $x \neq 0$, men $\ln(x)$ er kun definert for alle $x > 0$. Dermed er hele brøken kun definert for alle $x > 0$.

c) Sant. $y = \ln(x)$ går mot $-\infty$ når x går mot 0.

d) Sant. Nivåkurven $x^2 + y^2 = 4$ beskriver en sirkel med radius 2, sentrert i origo $(0,0)$. For å finne helningen til nivåkurven bruker vi implisitt derivasjon til å finne $y'(x)$ idet vi antar at y er en funksjon av x:
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + \left(y(x)\right)^2\right) = 2x + 2y(x)y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y(x)} = -\frac{x}{y}$$
Dette er helningen til tangenten som går gjennom punktet (x,y).

e) Usant. Den andrederiverte til $p(x) = x^{\frac{2}{3}}$ er gitt ved
$$p'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow p''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2}{9\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4}$$
Dermed er $p''(x) < 0$ for alle $x \neq 0$.

Oppgave 3 (av 5) (20 av 100 poeng)

En økonom ønsker å maksimere nyttefunksjonen gitt ved $U(x, y) = \alpha\sqrt{x} + (1-\alpha)\sqrt{y}$ (der $\alpha \in (0,1)$) med bibetingelsen $px + qy = 1$.

a) Sett opp Lagrange-funksjonen og utled førsteordensbetingelsene.

b) Løs problemet og finn optimal etterspørsel etter vare x og y, $x^*(p, q, \alpha)$ og $y^*(p, q, \alpha)$. Vis at disse kan skrives som

$$y^*(p, q, \alpha) = \frac{1}{\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{q}{p} + 1\right] q} \quad (*)$$

$$x^*(p, q, \alpha) = \frac{1}{\left[1 + \frac{p}{q}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\right] p} \quad (**)$$

c) Anta $\alpha = \frac{1}{2}$. Finn elastisitetene til $y^*(p, q, \alpha)$ mhp p og q: $El_p y^*$ og $El_q y^*$.

Svar:

a) Lagrange-funksjonen er gitt ved

$$L(x, y, \lambda) = \alpha x^{\frac{1}{2}} + (1-\alpha) y^{\frac{1}{2}} - \lambda(px + qy - 1)$$

Førsteordensbetingelsene er gitt ved

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\alpha}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \lambda p = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{(1-\alpha)}{2} y^{-\frac{1}{2}} - \lambda q = 0 \quad (**)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - px - qy = 0 \quad (***)$$

Studentene trenger ikke å derivere mhp λ (eller å inkludere λ som et argument i Lagrange-funksjonen) sålenge de husker at bibetingelsen må være med.

b) Fra betingelsene $(*)$ og $(**)$ får vi

$$\lambda = \frac{\alpha}{2p} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1-\alpha)}{2q} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{p}{q} y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \left(\frac{q}{p}\right)^2 y$$

Vi setter denne inn i bibetingelsen og får

$$p\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \left(\frac{q}{p}\right)^2\right] y + qy = 1$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{q}{p} + 1\right] qy = 1$$

$$\Rightarrow y^*(p, q, \alpha) = \frac{1}{\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{q}{p} + 1\right] q}$$

Vi bruker at

$$x^*(p,q,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \left(\frac{q}{p}\right)^2 y^*(p,q,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \left(\frac{q}{p}\right)^2 \frac{1}{\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{q}{p} + 1\right] q}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{p^2}{q^2} \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{q}{p} + 1\right] q} = \frac{1}{\left[\frac{p}{q} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{p^2}{q^2}\right] q} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{p}{q}\right] q}$$

Alt i alt har vi

$$y^*(p,q,\alpha) = \frac{1}{\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \frac{q}{p} + 1\right] q}$$

$$x^*(p,q,\alpha) = \frac{1}{\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{p}{q} + 1\right] p}$$

c) Antar at $\alpha = \frac{1}{2}$ og får

$$y^*\left(p,q,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left[\frac{q}{p} + 1\right] q} = \frac{1}{\left[\frac{q+p}{p}\right] q} = \frac{p}{q[q+p]}$$

Først finner vi de deriverte mhp p og q:

$$\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{q[q+p] - pq}{(q[q+p])^2} = \frac{q^2}{(p+q)^2 q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial q} = -\frac{p}{(q[q+p])^2}[2q+p] = -\frac{p[2q+p]}{(q[q+p])^2}$$

$$El_p y^* = \frac{p}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{p}{\frac{p}{[p+q]q}} \cdot \frac{1}{(p+q)^2} = \frac{q}{p+q}$$

$$El_q y^* = \frac{q}{\frac{p}{[p+q]q}} \cdot \left(-\frac{2qp+p^2}{(q[q+p])^2}\right) = -\frac{(2q+p)pq^2[p+q]}{pq^2[p+q]^2} = -\frac{2q+p}{p+q}$$

Oppgave 4 (av 5) (20 av 100 poeng)

Gitt funksjonen $f(x) = x^2 - 4x + 4$:

a) Finn intervallene der funksjonen er voksende og avtakende.
b) Bestem funksjonens nullpunkt(er).
c) Finn den lineære approksimasjonen til funksjonen rundt punktet $(3, f(3))$.

Svar:

a) Funksjonen er voksende når $f'(x) \geq 0$ og avtakende når $f'(x) \leq 0$. Strengt voksende når $f'(x) > 0$ og strengt avtakende når $f'(x) < 0$. $f'(x)$ er gitt ved

$$f'(x) = 2x - 4$$

Funksjonen er voksende for $2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ og avtakende for $2x - 4 \leq 0 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$.

b) Vi løser $x^2 - 4x + 4 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

c) Vi har

$$f(3) = 3^2 - 4(3) + 4 = 9 - 12 + 4 = 1$$
$$f'(3) = 2(3) - 4 = 2$$

Dermed har vi følgende lineære approksimasjon:

$$f(x) \approx 1 + 2(x - 3) = 2x - 5$$

Oppgave 5 (av 5) (20 av 100 poeng)

Betrakt funksjonen $g(x, y) = y^3 - 3xy + 4x^2$:

a) Finn eventuelle stasjonærpunkter for funksjonen.

b) Klassifiser hvert stasjonærpunkt ved hjelp av andreordensbetingelsene.

Svar:

a) Stasjonærpunktene er gitt ved

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -3y + 8x = 0 \;\; (*)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \;\; (**)$$

Vi har et stasjonærpunkt i $(x, y) = (0,0)$. Om vi antar at $(x, y) \neq (0,0)$ så har vi

$$8x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{8}y \;\; (fra\ *)$$
$$3y^2 - 3\left(\frac{3}{8}y\right) = 3y^2 - \frac{9}{8}y = 0$$
$$\Rightarrow 3y = \frac{9}{8} \Rightarrow y = \frac{3}{8}$$
$$\Rightarrow x = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

Dermed har vi to stasjonærpunkt. Ett i $(x_1, y_1) = (0,0)$ og ett i $(x_2, y_2) = \left(\frac{9}{64}, \frac{3}{8}\right)$.

b) De andrederiverte er gitt ved

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 8 > 0$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 6y$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -3$$

Determinanten til Hessian-matrisen (studentene bruker muligens begreper som 'Hessian-betingelsen') er dermed

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)^2 = 8 \cdot 6y - (-3)^2 = 8 \cdot 6y - 9$$

I punktet (x_1, y_1) er denne $8 \cdot 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$. Dette er dermed et sadelpunkt.
I punktet (x_2, y_2) er denne $8 \cdot 6 \cdot \frac{3}{8} = 18 - 9 = 9 > 0$. Dette er dermed et lokalt minimum. Studentene trenger ikke å kommentere på hvorvidt dette er globalt minimum eller ikke.