

# Eksamen ECON1100 - Høst 2025

## Sensorveiledning

November 18, 2025

### Oppgave 1 (15 poeng)

Finn de førsteordens partiellderiverte av følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter:

(a)  $f(x, y) = 3x^2 + \frac{1}{2}y^4$

(b)  $f(x) = a^x + x^2$ , der  $a$  er en konstant

(c)  $g(p, q) = \ln(p^2 + e^q)$

---

### Svar:

(a)  $f'_x(x, y) = 6x$ ,  $f'_y(x, y) = \frac{4}{2}y^3 = 2y^3$

(b)  $f'(x) = a^x \ln a + 2x$

(c)  $g'_p(p, q) = \frac{2p}{p^2 + e^q}$ ,  $g'_q(p, q) = \frac{e^q}{p^2 + e^q}$

---

### Oppgave 2 (20 poeng)

Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

(a) Den lineære approksimasjonen til  $f(x, y) = x^2y + y^3 - 4x$  rundt  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  er  $-2x + 4y - 4$ .

(b)  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4.$

(c) Funksjonen  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x+y}$  er ikke homogen.

(d) Funksjonen  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$  har en invers gitt ved  $f^{-1}(y) = g(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right).$

---

**Svar:**

(a) SANT

Formelen for en lineær approksimasjon er:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Finner delene man trenger:

$$f(x_0, y_0) = 1 + 1 - 4 = -2$$

$$f'_x(x, y) = 2xy - 4 \Rightarrow f'_x(x_0, y_0) = -2$$

$$f'_y(x, y) = x^2 + 3y^2 \Rightarrow f'_y(x_0, y_0) = 4$$

Da får vi:

$$f(x, y) \approx -2 + (-2)(x - 1) + 4(y - 1)$$

$$f(x, y) \approx -2 + 4y - 4$$

(b) USANT

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\left[ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right]_1^4 = 2\sqrt{4} + C - 2\sqrt{1} + C = 4 - 2 = 2 \neq 4$$

(c) USANT

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \frac{(tx)^2(ty)^2}{tx + ty} \\ &= \frac{t^2x^2t^2y^2}{t(x + y)} \\ &= \frac{t^4x^2y^2}{t(x + y)} \\ &= t^3 \frac{x^2y^2}{x + y} \\ &= t^3 f(x, y) \end{aligned}$$

Funksjonen er homogen av grad 3.

(d) SANT

Må først sjekke om funksjonen har en invers:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$$

Funksjonen er strengt stigende, og har dermed en invers. Løser for  $x$  som en funksjon av  $y$ :

$$\begin{aligned} f(x) = y &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \\ 1 + e^{-x} &= \frac{1}{y} \\ e^{-x} &= \frac{1}{y} - 1 = \frac{1 - y}{y} \\ \ln(e^{-x}) &= \ln\left(\frac{1 - y}{y}\right) \\ -x &= \ln\left(\frac{1 - y}{y}\right) \\ x &= -\ln\left(\frac{1 - y}{y}\right) \\ x &= -[\ln(1 - y) - \ln(y)] = \ln(y) - \ln(1 - y) = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right) \end{aligned}$$

---

**Oppgave 3** (20 poeng)

Betrakt funksjonen  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ . Du kan ta for gitt at funksjonen har ett nullpunkt, for  $x \approx -1$ .

- (a) Finn funksjonens stasjonærpunkt(er).
- (b) Hvor er funksjonen stigende og hvor er den synkende?
- (c) Klassifiser stasjonærpunktene du fant i oppgave (a).

---

**Svar:**

- (a) Finner den førstederiverte og setter den lik 0:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x \\3x^2 - 6x &= 0 \\3x(x - 2) &= 0\end{aligned}$$

Dette gir stasjonærpunktene  $x = 0$  og  $x = 2$ .

- (b)  $f(x)$  er stigende når  $f'(x) = 3x(x - 2) \geq 0$ . Dette er tilfellet når

$$3x \geq 0 \quad \text{og} \quad x - 2 \geq 0$$

eller når

$$3x \leq 0 \quad \text{og} \quad x - 2 \leq 0$$

Funksjonen er derfor stigende for  $x \in (-\infty, 0]$  og for  $x \in [2, \infty)$ .

Funksjonen er synkende når  $f'(x) = 3x(x - 2) \leq 0$ . Dette er tilfellet når

$$3x \leq 0 \quad \text{og} \quad x - 2 \geq 0$$

eller når

$$3x \geq 0 \quad \text{og} \quad x - 2 \leq 0$$

Funksjonen er derfor synkende for  $x \in [0, 2]$ .

(c)  $f''(x) = 6x - 6$

Siden funksjonen ikke er globalt konveks eller konkav evaluerer vi den andrederiverte i stasjonærpunktene:

$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow \text{(lokalt) maksimum}$$

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{(lokalt) minimum}$$

---

#### Oppgave 4 (25 poeng)

En nyttefunksjon er gitt ved  $U(x, y) = \ln(xy)$ . Du kan anta  $x > 0$  og  $y > 0$ .

(a) Finn et uttrykk for nivåkurven  $y(x)$  for et gitt nyttenivå  $k > 0$ .

(b) Er nivåkurven

(i) Stigende eller synkende?

(ii) Konveks eller konkav?

Anta nå at nyttefunksjonen  $U(x, y) = \ln(xy)$  representerer nytten til hele befolkningen i en økonomi. Begge godene  $x$  og  $y$  produserer klimagassutslipp. Én enhet av gode  $x$  produserer  $e_1$  enheter utslipp, mens én enhet av gode  $y$  produserer  $e_2$  enheter utslipp. Du har fått i oppdrag å maksimere nytte gitt at totale utslipp er lik et bestemt nivå  $\bar{E}$ , altså maksimere nytte gitt at  $e_1x + e_2y = \bar{E}$ .

(c) Sett opp Lagrange-funksjonen og utled førsteordensbetingelsene.

(d) Hva er optimalt konsum av gode  $x$  og  $y$ ,  $x^*(e_1, e_2, \bar{E})$  og  $y^*(e_1, e_2, \bar{E})$ ?

---

**Svar:**

(a)

$$\ln(xy) = k$$

$$e^{\ln(xy)} = e^k$$

$$xy = e^k$$

$$y(x) = \frac{e^k}{x}$$

- (b) (i)  $y'(x) = -\frac{e^k}{x^2} < 0$  for alle  $x \Rightarrow y(x)$  er (strengt) synkende  
(ii)  $y''(x) = \frac{2e^k}{x^3} > 0$  for alle  $x > 0 \Rightarrow y(x)$  er konveks
- (c) Lagrange-funksjonen er gitt ved:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \ln(xy) - \lambda(e_1x + e_2y - \bar{E})$$

Førsteordensbetingelsene er gitt ved:

$$\mathcal{L}'_x = \frac{1}{x} - \lambda e_1 = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}'_y = \frac{1}{y} - \lambda e_2 = 0 \quad (2)$$

$$e_1x + e_2y = \bar{E} \quad (3)$$

- (d) Vi bruker (1) og (2) til å eliminere  $\lambda$ . (1) og (2) gir henholdsvis

$$\lambda = \frac{1}{e_1x} \quad \text{og}$$

$$\lambda = \frac{1}{e_2y}$$

Vi kan da løse for  $x(y)$ :

$$\frac{1}{e_1x} = \frac{1}{e_2y} \Leftrightarrow e_1x = e_2y \Leftrightarrow x = \frac{e_2}{e_1}y \quad (4)$$

Setter vi dette inn i bibetingelsen (3) får vi:

$$e_1 \left( \frac{e_2}{e_1}y \right) + e_2y = \bar{E}$$

$$2e_2y = \bar{E}$$

$$y^*(e_1, e_2, \bar{E}) = \frac{\bar{E}}{2e_2}$$

Vi finner  $x^*(e_1, e_2, \bar{E})$  ved å sette uttrykket for  $y^*(e_1, e_2, \bar{E})$  tilbake i (4):

$$x^*(e_1, e_2, \bar{E}) = \frac{e_2}{e_1}y^*(e_1, e_2, \bar{E})$$

$$x^*(e_1, e_2, \bar{E}) = \frac{\bar{E}}{2e_1}$$

---

**Oppgave 5** (20 poeng)Betragt funksjonen  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-y}$ .

- (a) Hva er funksjonens definisjonsområde?
- (b) Finn og klassifiser det indre ekstrempunktet. Er det et lokalt eller globalt ekstrempunkt?
- (c) Finnes det andre ekstrempunkter? Isåfall hvor? Du trenger ikke å utlede disse matematisk. Du trenger heller ikke å klassifisere dem.

---

**Svar:**

(a)  $0 \leq x \leq 1$  og  $0 \leq y \leq 1$

(b) Førsteordensbetingelsene er gitt ved:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \quad (5)$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{1-y}} = 0 \quad (6)$$

(5) gir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} &= 0 \\ 2\sqrt{x} &= 2\sqrt{1-x} \\ 1-x &= x \\ x^* &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

På samme måte gir (6)

$$y^* = \frac{1}{2}$$

Vi har altså et indre ekstrempunkt i  $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

De andrederiverte og den kryssderiverte er gitt ved:

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y) &= -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}} \\f''_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4(1-y)^{\frac{3}{2}}} \\f''_{xy}(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Begge de andrederiverte er negative for  $0 < x < 1$ . Det betyr også at vi har  $f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 > 0$  for  $0 < x < 1$ . Det indre ekstrempunktet er altså et globalt maksimum.

- (c) Her er vi ute etter hjørneløsninger (eventuelt “randløsninger”). Funksjonen har fire globale minimumspunkter, i  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  og  $(1, 1)$ . Studentene trenger ikke å klassifisere hjørneløsningene. Men de kan evaluere funksjonsverdien for hver “case” og finne at vi her får  $f(x, y) = 2 < f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Videre kan de argumentere for at siden vi er randen av definisjonsområdet vil ikke funksjonen kunne ta noen lavere verdi enn 2, derfor er dette globale minima. Siden funksjonen er konkav vil det ikke finnes et minimum i det indre av randlinjen. Maksimum på randen finnes i  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  og  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ , som er mindre enn indre maksimum.
-