# Eksamen

## ECON1100 Vår 2018 - Løsningsforslag

**Oppgave 1** (15 poeng)

a) Definert for alle $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = x^2 + x + 1 \tag{1}$$

b) Definert for $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ (alle $x$ unntatt $x = -1$)

$$f'(x) = \frac{3x^3 + 9x^2 + 4x - 8}{(x+1)^3} \tag{2}$$

c) Definert for $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \cap y \in (0, \infty)$ ($x$ må ligge i enten det første eller det andre intervallet, altså ikke $x = -1$, og samtidig må $y$ være strengt positiv).

$$F'_x(x, y) = \frac{3x^3 + 9x^2 + 4x - 8}{(x+1)^3} \frac{(\ln y)^2}{y} \tag{3}$$

$$F'_y(x, y) = \frac{(3x^3 - 4x + 2)(2 - \ln y) \ln y}{(x+1)^2 y^2} \tag{4}$$

d) Definert for $xy^2 > 0$ som gir at $x > 0 \cap |y| > 0$ eller at:

$x \in (0, \infty) \cap y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$G'_x(x, y) = \frac{(\ln xy^2)^2(3 - (\ln xy^2))}{x^2 y} \tag{5}$$

$$G'_y(x, y) = \frac{(\ln xy^2)^2(6 - (\ln xy^2))}{xy^2} \tag{6}$$

(Alle varianter av disse uttrykkene må gi full poengscore.)

**Oppgave 2** (20 poeng)

a)

(i) $\frac{1}{3}x^3 + C$

(ii) $4x - \frac{1}{3}x^3 + C$

(iii) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

(iv) $\ln |x - 1| + C$

b) De to kurvene skjærer hverandre når:

$$x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \tag{7}$$

Samtidig har $4 - x^2$ et nullpunkt for $x = 2$. Dermed må vi finne:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (4 - x^2) dx \tag{8}$$

Som gir oss:

$$\Big|_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3}x^3\right) + \Big|_{\sqrt{2}}^{2} \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right) \tag{9}$$

$$= \left(\frac{1}{3}(2^{1/2})^3\right) + \left(8 - \frac{8}{3} - 4\sqrt{2} + \frac{1}{3}(2^{1/2})^3\right) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{3}2^{5/2} + \frac{16}{3} - 4\sqrt{2} \tag{11}$$

$$\approx 1.562097 \tag{12}$$

(Her må godkjennes alle varianter der kandidaten har satt inn for riktige tall inn i riktige funksjoner. Riktig integrasjon, men feil tall bør gi litt trekk.)

c) Vises ved å derivere høyresiden:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{xe^x} + C\right) \tag{13}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}xe^x - (e^x + xe^x)\ln x}{x^2 e^{2x}} \tag{14}$$

$$= \frac{e^x(1 - (1+x)\ln x)}{x^2 e^{2x}} \tag{15}$$

$$= \frac{1 - (1+x)\ln x}{x^2 e^x} \tag{16}$$

Siden dette uttrykket er lik integranden, så har vi vist at det stemmer.

**Oppgave 3** (25 poeng)

a)

$$\mathfrak{L}(x,y) = F(x,y) - \lambda(g(x) + f(y) - m) \tag{17}$$

Dette gir oss FOB:

$$\mathfrak{L}'_x(x,y) = F'_1(x,y) - \lambda g'(x) = 0 \tag{18}$$

$$\mathfrak{L}'_y(x,y) = F'_2(x,y) - \lambda f'(y) = 0 \tag{19}$$

b) Vi kan flytte over det negative leddet i hver av førsteordensbetingelsene til høyresiden, for så å dele den første på den andre:

$$\mathfrak{L}'_x(x,y) = F'_1(x,y) = \lambda g'(x) \tag{20}$$

$$\mathfrak{L}'_y(x,y) = F'_2(x,y) = \lambda f'(y) \tag{21}$$

Da får vi:

$$\frac{F'_1(x,y)}{F'_2(x,y)} = \frac{\lambda g'(x)}{\lambda f'(y)} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \frac{F'_1(x,y)}{F'_2(x,y)} = \frac{g'(x)}{f'(y)} \tag{23}$$

c) Med de oppgitte funksjonene trenger vi altså nå kun å finne hver av de partielle deriverte og sette inn.

$$F_1'(x, y) = \frac{1}{x} \tag{24}$$

$$F_2'(x, y) = \frac{1}{y} \tag{25}$$

$$g'(x) = p_1 \tag{26}$$

$$f'(y) = 2yp_2 \tag{27}$$

Vi setter dette inn i betingelsen fra oppgave b og får:

$$\frac{y}{x} = \frac{p_1}{2yp_2} \tag{28}$$

Det gir oss ved å omorganisere:

$$x = \frac{2p_2y^2}{p_1} \tag{29}$$

d) For å finne $y$ kan vi sette inn for svaret i c inn i bibetingelsen:

$$p_1\left(\frac{2p_2y^2}{p_1}\right) + p_2y^2 = m \tag{30}$$

$$3p_2y^2 = m \tag{31}$$

$$y = \sqrt{\frac{m}{3p_2}} \tag{32}$$

Noter at vi umiddelbart kan kaste den negative roten, fordi vi har $F(x, y) = \ln x + \ln 2y$ som ikke er definert for negative verdier av $y$. Da får vi ved å sette tilbake for $y$ i uttrykket for $x$ at:

$$x = \frac{2p_2}{p_1}\frac{m}{3p_2} \tag{33}$$

$$x = \frac{2m}{3p_1} \tag{34}$$

e) Dersom $p_1$ øker litt finner vi:

$$\frac{\partial x}{\partial p_1} = -\frac{2m}{3p_1^2} < 0 \tag{35}$$

Elastisiteten blir:

$$El_{p_1}x = \frac{p_1}{x}\frac{\partial x}{\partial p_1} \tag{36}$$

$$El_{p_1}x = \frac{3p_1^2}{2m}\left(-\frac{2m}{3p_1^2}\right) \tag{37}$$

$$El_{p_1}x = -1 \tag{38}$$

**Oppgave 4** (25 poeng)

a) Usant. Den andrederiverte kan ikke være negativ, men vi kan ha fallende og konvekse funksjoner. For eksempel er:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{39}$$

fallende og konveks for $x > 0$ , fordi $f'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} < 0$ og $f''(x) = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}} > 0$

b) Sant. Vi har at:

$$F'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \tag{40}$$

Det gir $F(1) = 2 - 4 + 1 = -1$, slik at stasjonærpunktet er $(x, y) = (1, -1)$. Vi har også at:

$$F''(x) = 4 > 0 \tag{41}$$

Dermed er dette et globalt minimumspunkt, og $F$ er strengt konveks.

c) Sant. Vi finner førsteordensbetingelsene:

$$G'_x = 3x^2 + 3y = 0 \tag{42}$$

$$G'_y = 2y + 3x = 0 \tag{43}$$

Den siste gir oss:

$$y = -\frac{3}{2}x \tag{44}$$

Som innsatt i den første gir:

$$3x^2 - \frac{9}{2}x = 0 \tag{45}$$

$$x\left(3x - \frac{9}{2}\right) = 0 \tag{46}$$

Dette blir bare 0 dersom $x = 0$ eller $3x - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Da har vi at for $x = 0$:

$$y = -\frac{3}{2} \cdot 0 = 0 \tag{47}$$

Og for $x = \frac{3}{2}$:

$$y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{4} \tag{48}$$

Dette bekrefter at $(x, y) = (0, 0), \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ er stasjonærpunktene. Så må vi finne annenordensbetingelsen:

$$G''_{xx} = 6x \tag{49}$$

$$G''_{yy} = 2 > 0 \tag{50}$$

$$G''_{xy} = G''_{yx} = 3 \tag{51}$$

Vi har at siden $G''_{yy} > 0$ kan vi aldri ha et maksimum. For $(x, y) = (0, 0)$ får vi at:

$$G''_{xx}G''_{yy} - (G''_{xy})^2 = 6 \cdot 0 \cdot 2 - 3^2 = -9 < 0 \tag{52}$$

Dermed er dette et sadelpunkt. For $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ får vi:

$$G''_{xx}G''_{yy} - (G''_{xy})^2 = 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 - 3^2 = 9 > 0 \tag{53}$$

Vi har også at $G''_{xx} = 9 > 0$, og dermed er dette et lokalt minimumspunkt.

d) Usant. Denne funksjonen er ikke deriverbar i punktet $x = 0$, og en enkel evaluering av Newton-kvotienten viser dette:

$$y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h} \tag{54}$$

Benytt denne på vår oppgave, så får vi:

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \tag{55}$$

For at grensen skal eksistere, må den nærme seg det samme tallet både ovenfra og nedenfra:

$$y'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \tag{56}$$

$$y'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \tag{57}$$

I den første grensen tar vi "et lite positivt tall og deler på det samme lille positive tallet", mens i den andre grensen tar vi "et lite positivt tall og deler på det negative av det samme lille tallet". Dermed blir grensen ovenfra positiv, og grensen nedenfra negativ. Det betyr at grensen ikke eksisterer, og funksjonen er ikke deriverbar i $x = 0$.

**Oppgave 5** (15 poeng)

Tips: begge kan deriveres ved bruk av regelen:

$$y'(x) = -\frac{F_1'(x, y)}{F_2'(x, y)} \tag{58}$$

i det vi antar at venstresiden kan skrives som $F(x, y)$. Da får vi:

a)

$$y'(x) = -\frac{\frac{1}{xy^2}\sqrt{yx^2} + \frac{\ln x}{y^2}\frac{1}{2\sqrt{yx^2}}2xy}{-\frac{2\ln x}{y^3}\sqrt{yx^2} + \frac{\ln x}{y^2}\frac{1}{2\sqrt{yx^2}}x^2} \tag{59}$$

Mange vil stoppe umiddelbart her, og det er greit. Det kan vises ved å gange oppe og nede med $2xy^3\sqrt{yx^2}$ at:

$$y'(x) = -\frac{2y^2x^2 + 2x^2y^2 \ln x}{-4x^3 y \ln x + x^3 y \ln x} \tag{60}$$

$$y'(x) = \frac{2y(1 + \ln x)}{3x \ln x} \tag{61}$$

Dette er det meste en kan forkorte denne brøken. Kandidater som vipper mellom to karakterer og gjennomfører denne forkortingen fullt ut, bør kunne belønnes for det.

b) Bruk regelen igjen:

$$y'(x) = -\frac{y^2 e^{xy^2} + H_1'(t,v)t'(x)}{2xye^{xy^2} + H_2'(t,v)v'(y)} \tag{62}$$

Som ikke kan forkortes videre.