Sensorveiledning

Høst 2021 (utsatt eksamen)

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 5) (25 av 100 poeng)
Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = x^4 - 2x^{-\frac{b}{2}} + 3$, der b er en positiv konstant

b) $g(x) = 2\sqrt{x}e^x$

c) $h(x) = \ln(g(x))$, der $g(x)$ er gitt i oppgave (b)

d) $y(a,b) = z^2 - x$ der $z = \frac{a}{2b}$ og $x = a + b$

e) $x(u,v) = u^v$

Svar:

a) $f'(x) = 4x^3 + bx^{-\frac{b}{2}-1}$

b) $g'(x) = x^{-\frac{1}{2}}e^x + 2x^{\frac{1}{2}}e^x = \frac{e^x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}e^x = \frac{(1+2x)e^x}{\sqrt{x}}$

c) $h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}} = \frac{1+2x}{2x}$

d) $y'_a(a,b)) = \frac{a}{2b^2} - 1$
$y'_b(a,b) = -\frac{a^2}{2b^3} - 1$

e) $x'_u(u,v) = vu^{v-1}$
$x'_v(u,v) = u^v \ln(u)$

Oppgave 2 (av 5) (25 av 100 poeng)
Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Funksjonen $h(x,y,z) = \frac{x^2y^2}{z} - \ln(e^x)\,yz + z^3$ er homogen.

b) Funksjonen $z(x) = \ln(ax)$ er strengt globalt konveks.

c) Hvis ingen punkter tilfredsstiller funksjonens førsteordensbetingelse, har funksjonen ingen ekstrempunkter.

d) Anta at vi har løst følgende problem:

$$\max_{x,y} f(x,y) \quad \text{gitt at} \quad g(x,y) = m$$

Hvis m endres med én enhet endres verdifunksjonen $f^*(m) = f\left(x^*(m), y^*(m)\right)$ med verdien på Lagrange-multiplikatoren λ.

e) Anta at $0 < \beta < 1$. Da har vi at

$$\sum_{t=0}^{\infty} z\beta^t > \sum_{t=1}^{\infty} z\beta^t$$

for enhver konstant $z > 0$.

Svar:

a) Sant:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= \frac{x^2y^2}{z} - \ln\left(e^x\right) yz + z^3 \\ &= h(x,y,z) = \frac{x^2y^2}{z} - xyz + z^3 \\ h(tx,ty,tz) &= \frac{t^2x^2t^2y^2}{tz} - txtytz + t^3z^3 \\ &= t^3h(x,y,z) \end{aligned}$$

Funksjonen er dermed homogen av grad 3.

b) Usant:

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{1}{x} \\ z''(x) &= -\frac{1}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

Funksjonen er derfor strengt globalt konkav.

c) Usant. Ethvert eksempel på det motsatte godkjennes som forklaring. Mange vil antakelig trekke frem at funksjonen kan ha hjørneløsninger. (Det finnes selvsagt flere tilfeller der det er usant – det kan for eksempel være en funksjon som ikke er kontinuerlig deriverbar. Slike tilfeller er imidlertid ikke behandlet i detalj i pensum, det er derfor ikke forventet at studentene påpeker dette. Hjørneløsninger bør de kjenne til.)

d) Sant. Dette er (det generelle) omhyllingsteoremet, som sier at $\frac{df^*(a)}{da} = \frac{\partial \mathcal{L}(x^*(a), y^*(a))}{\partial a}$. Dersom vi partiellderiverer Lagrange-funksjonen mhp. verdien av bibetingelsen får vi λ.

e) Sant. Det kan vises at

$$\sum_{t=1}^{\infty} z\beta^t = \beta \sum_{t=0}^{\infty} z\beta^t = \sum_{t=0}^{\infty} z\beta^t - z$$

Dermed må ulikheten holde når $\beta \in (0, 1)$ og $z > 0$.

Studentene kan gå frem på mange måter i denne oppgaven – det er ikke forventet at de beviser likheten over, eller utleder verdien av de to uendelige rekkene.

Oppgave 3 (av 5) (10 av 100 poeng)
Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = xy - x^2 + y^3 - 6 \tag{1}$$

a) Finn differensialet til $f(x, y)$.

b) Hvor mange stasjonærpunkt har funksjonen?

c) Klassifiser stasjonærpunktene ved bruk av andreordensbetingelsen. Er eventuelle ekstrempunkt du har funnet globale?

Svar:

a) Formelen for differensialet er gitt ved $df = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= y - 2x \\ f'_y(x, y) &= x + 3y^2 \\ df &= (y - 2x)dx + (x + 3y^2)dy \end{aligned}$$

b) Førsteordensbetingelse:

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= y - 2x = 0 \\
f'_y(x,y) &= x + 3y^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y = 2x \\
&x + 3(2x)^2 = 0 \\
&x(x + 12x) = 0 \\
&x_1 = 0 \quad \text{og} \quad y_1 = 0 \\
&x_2 = -\frac{1}{12} \quad \text{og} \quad y_2 = -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Funksjonen har to stasjonærpunkt, $(0,0)$ og $\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)$.

c) Andreordensbetingelsen:

$$
\begin{aligned}
&f''_{xx}(x,y) = -2 \\
&f''_{yy}(x,y) = 6y \\
&f''_{xy}(x,y) = 1 \\
&(0,0): \\
&f''_{xx}(x,y) = -2 < 0 \\
&f''_{yy}(0,0) = 0 \\
&f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 0 - 1 = -1 < 0 \\
&\Rightarrow (0,0) \text{ er et sadelpunkt} \\
&\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right): \\
&f''_{xx}(x,y) = 2 < 0 \\
&f''_{yy}\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) = -1 < 0 \\
&f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 2 - 1 = 1 > 0 \\
&\Rightarrow \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right) \text{ er et maksimumspunkt}
\end{aligned}
$$

Dersom andreordensbetingelsen skal returnere et globalt maksimum må følgende betingelser holde i hele definisjonsområdet til funksjonen f:

$$\begin{aligned} &f''_{xx} < 0 \\ &f''_{yy} < 0 \\ &f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

I denne oppgaven holder AOB bare for enkelte kombinasjoner av x og y. Dermed sier AOB at vi har et lokalt maksimum. Den gir ingen konklusjon på hvorvidt det også er et globalt maksimum. (AOB er bare en tilstrekkelig, ikke en nødvendig betingelse. Dermed kan det være et globalt maksimum, også når AOB bare holder for lokalt maksimum. Selv om dette er drøftet i forelesning er det ikke vektlagt i detalj. Det viktigste er derfor at studentene skiller mellom lokalt/globalt, ikke at de forstår implikasjonene av at betingelsen er tilstrekkelig, men ikke nødvendig.)

Oppgave 4 (av 5) (25 av 100 poeng)
En bedrift produserer en vare Y med følgende teknologi (produktfunksjon):

$$Y = K^{\alpha} E^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} \tag{2}$$

der α og β er strengt positive konstanter og $K \geq 0, E \geq 0, L \geq 0$.

Kostnadene ved produksjonen er gitt ved:

$$C(K, E, L) \tag{3}$$

a) Med utgangspunkt i likning (2) og (3) får du oppgitt følgende optimeringsproblem:

$$\min_{K,E,L} C(K, E, L) \quad \text{gitt at} \quad K^{\alpha} E^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} = \bar{Y}$$

Er dette et kostnadsminimeringsproblem eller et profittmaksimeringsproblem? Hvorfor? Sett opp Lagrange-funksjonen og finn førsteordensbetingelsene.

b) Vis at førsteordensbetingelsene kan skrives som

$$\begin{aligned} \frac{K}{E} &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{C'_E(K, E, L)}{C'_K(K, E, L)} \\ \frac{L}{E} &= \frac{1-\alpha-\beta}{\beta} \frac{C'_E(K, E, L)}{C'_L(K, E, L)} \end{aligned}$$

La heretter kostnadsfunksjonen ta følgende form:

$$C(K, E, L) = qK + rE + wL \tag{4}$$

c) Uten å løse problemet på nytt, finn betinget faktoretterspørsel etter energi, $E^*(q, r, w, \bar{Y})$. Du kan anta at stasjonærpunktet er et optimum.

d) Finn elastisiteten til etterspørselen etter energi mhp. energiprisen (r). (Hint: Start med å vise at $\frac{\partial E^*}{\partial r} = \gamma \frac{E^*}{r}$, der γ er et konstantledd som består av parametere i modellen.)

Svar:

a) Kostnadsminimeringsproblem. Vi minimerer kostnadsfunksjonen og holder produksjonen konstant.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(K, E, L) &= C(K, E, L) - \lambda \left(K^\alpha E^\beta L^{1-\alpha-\beta} - \bar{Y}\right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= C'_K(K, E, L) - \lambda \alpha K^{\alpha-1} E^\beta L^{1-\alpha-\beta} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E} &= C'_E(K, E, L) - \lambda \beta K^\alpha E^{\beta-1} L^{1-\alpha-\beta} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= C'_L(K, E, L) - \lambda (1-\alpha-\beta) K^\alpha E^\beta L^{-\alpha-\beta} = 0 \\
\bar{Y} &= K^\alpha E^\beta L^{1-\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

b) Deler FOB på hverandre for å få resultatet (de kan også sette inn for λ, men det er mer tidkrevende).

c) Deriverer den eksplisitte kostnadsfunksjonen:

$$\begin{aligned}
C'_K(K, E, L) &= q \\
C'_E(K, E, L) &= r \\
C'_L(K, E, L) &= w
\end{aligned}$$

Setter inn i FOB:

$$
\begin{aligned}
\frac{K}{E} &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{q} \\
K &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{q}E \\
\frac{L}{E} &= \frac{1-\alpha-\beta}{\beta}\frac{r}{w} \\
L &= \frac{1-\alpha-\beta}{\beta}\frac{r}{w}E
\end{aligned}
$$

Setter inn i bibetingelsen:

$$
\begin{aligned}
\bar{Y} &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{q}E\right)^{\alpha} E^{\beta} \left(\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}\frac{r}{w}E\right)^{1-\alpha-\beta} \\
&= E\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{q}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}\frac{r}{w}\right)^{1-\alpha-\beta} \\
E^*(q,r,w,\bar{Y}) &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{q}{r}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\frac{w}{r}\right)^{1-\alpha-\beta} \bar{Y} \\
&= \left(\frac{q}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{1-\beta} \left(\frac{w}{1-\alpha-\beta}\right)^{1-\alpha-\beta} \bar{Y}
\end{aligned}
$$

d) Skal finne $El_r E^* = \frac{r}{E^*}\frac{\partial E^*}{\partial r}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E^*}{\partial r} &= (1-\beta)\left(\frac{\beta}{r}\right)^{-\beta}\left(-\frac{\beta}{r^2}\right)\left(\frac{w}{1-\alpha-\beta}\right)^{1-\alpha-\beta}\bar{Y} \\
&= -\frac{1-\beta}{r}E^* = \gamma\frac{E^*}{r} \quad \text{der } \gamma = -(1-\beta) \\
El_r E^* &= \frac{r}{E^*}\left(-\frac{1-\beta}{r}E^*\right) \\
&= -(1-\beta)
\end{aligned}
$$

Noen studenter vil ikke være sterke nok i algebra til å finne den partiellderiverte på den foreslåtte formen. De bør få noe uttelling dersom de likevel finner $El_r E^* = \gamma$, men ikke full uttelling.

Oppgave 5 (av 5) (15 av 100 poeng)
Betrakt følgende nivåkurve:

$$h(x,y) = \ln\left(xg(y)\right) + xg(y) = c$$

der $y'(x) < 0$.

a) Vis at $y'(x) = -\frac{g(y)}{xg'(y)}$. (Hint: Her trenger du definisjonsområdet til funksjonen.)

b) Er $g(y)$ stigende eller fallende? Begrunn svaret ditt. (Hint: Ta definisjonsområdet til funksjonen i betraktning, og husk at $y'(x) < 0$).

Anta at $g(y) = y^a$, der $y > 0$ og a er en konstant.

c) Er nivåkurven $y(x)$ konveks eller konkav? (Hint: Bruk resultatet ditt i oppgave (b)).

d) Tegn en skisse av nivåkurven når $c = 2$ og $a = 1$, som tilfredsstiller de egenskapene du har funnet tidligere i oppgaven. Vær obs på definisjonsområdet til funksjonen, og bruk at verdimengden til funksjonen er $y \in (0, \infty)$. Du trenger ikke regne ut x- eller y-verdier i enkeltpunkter i denne oppgaven.

Svar: Minner om at kandidater skal ha uttelling for riktig utregning, også dersom den preges av følgefeil. Det innebærer at følgefeil bare skal gi trekk dersom feilen gjør utregningen vesentlig lettere.

a) Funksjonen lar seg ikke løse eksplisitt for y, og man må dermed bruke implisitt derivasjon. Funksjonen er definert når $xg(y) > 0$. Definerer $y \equiv y(x)$ og deriverer gjennom mhp. x:

$$\ln(xg(y(x))) + xg(y(x)) = c$$

$$\frac{g(y) + xg'(y)y'(x)}{xg(y)} + g(y) + xg'(y)y'(x) = 0$$

$$[g(y) + xg'(y)y'(x)] \underbrace{\left[\frac{1}{xg(y)} + 1\right]}_{\neq 0} = 0$$

$$g(y) + xg'(y)y'(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{g(y)}{xg'(y)}$$

Den deriverte kan også finnes ved å bruke at $\ln(xg(y)) = \ln(x) + \ln(g(y))$.

b) Funksjonen er bare definert når $xg(y) > 0$. Dermed må vi ha $g'(y) > 0$ for at $y'(x) > 0$ skal holde.

c) Får $g'(y) = ay^{a-1}$. Fra oppgave (b) vet vi at $g'(y) > 0$, dermed må $a > 0$. Setter inn i den deriverte til nivåkurven:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{g(y)}{xg'(y)} \\
&= -\frac{y^a}{axy^{a-1}} \\
&= -\frac{1}{axy^{-1}} \\
&= -\frac{y}{ax}
\end{aligned}
$$

Finner den andrederiverte for å bestemme om nivåkurven er konveks eller konkav:

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= -\frac{y'(x)ax - ay}{(ax)^2} \\
&= -\frac{-\frac{y}{ax}ax - ay}{(ax)^2} \\
&= \frac{(1+a)y}{(ax)^2} > 0
\end{aligned}
$$

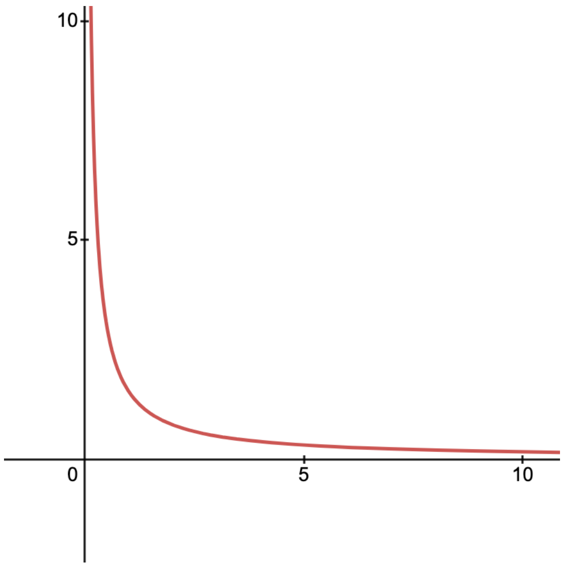
når vi vet at $a > 0$ og $y > 0$. Dermed er nivåkurven (globalt, strengt) konveks.

d) Det stilles få krav til presisjon, men følgende punkter bør komme frem:

- Definisjonsområdet $x \in (0, \infty)$ (som implisitt følger av at både $xg(y) > 0$ og $g(y) > 0$)
- Verdimengden $y \in (0, \infty)$ (som er oppgitt)
- Nivåkurven er fallende
- Nivåkurven er konveks

Alle disse punktene bør gi lik uttelling. Dersom det er gjort feil tidligere i oppgaven bør skissen inkludere studentens konklusjoner tidligere i oppgaven, fremfor punktene over. Nivåkurven har heller ingen stasjonærpunkt.

Funksjonen ser slik ut:


10
5
0
5
10