**Oppgave 1** (av 5) (25 av 100 poeng)
Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = x^4 - 2x^{-\frac{b}{2}} + 3$, der $b$ er en positiv konstant

b) $g(x) = 2\sqrt{x}e^x$

c) $h(x) = \ln(g(x))$, der $g(x)$ er gitt i oppgave (b)

d) $y(a, b) = z^2 - x$ der $z = \frac{a}{2b}$ og $x = a + b$

e) $x(u, v) = u^v$

**Oppgave 2** (av 5) (25 av 100 poeng)
Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Funksjonen $h(x, y, z) = \frac{x^2y^2}{z} - \ln(e^x)\, yz + z^3$ er homogen.

b) Funksjonen $z(x) = \ln(ax)$ er strengt globalt konveks.

c) Hvis ingen punkter tilfredsstiller funksjonens førsteordensbetingelse, har funksjonen ingen ekstrempunkter.

d) Anta at vi har løst følgende problem:

$$\max_{x,y} f(x, y) \quad \text{gitt at} \quad g(x, y) = m$$

Hvis $m$ endres med én enhet endres verdifunksjonen $f^*(m) = f\left(x^*(m), y^*(m)\right)$ med verdien på Lagrange-multiplikatoren $\lambda$.

e) Anta at $0 < \beta < 1$. Da har vi at

$$\sum_{t=0}^{\infty} z\beta^t > \sum_{t=1}^{\infty} z\beta^t$$

for enhver konstant $z > 0$.

**Oppgave 3** (av 5) (10 av 100 poeng)
Betrakt funksjonen

$$f(x,y) = xy - x^2 + y^3 - 6 \tag{1}$$

a) Finn differensialet til $f(x,y)$.

b) Hvor mange stasjonærpunkt har funksjonen?

c) Klassifiser stasjonærpunktene ved bruk av andreordensbetingelsen. Er eventuelle ekstrempunkt du har funnet globale?

**Oppgave 4** (av 5) (25 av 100 poeng)
En bedrift produserer en vare $Y$ med følgende teknologi (produktfunksjon):

$$Y = K^{\alpha} E^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} \tag{2}$$

der $\alpha$ og $\beta$ er strengt positive konstanter og $K \geq 0, E \geq 0, L \geq 0$.

Kostnadene ved produksjonen er gitt ved:

$$C(K,E,L) \tag{3}$$

a) Med utgangspunkt i likning (2) og (3) får du oppgitt følgende optimeringsproblem:

$$\min_{K,E,L} C(K,E,L) \quad \text{gitt at} \quad K^{\alpha} E^{\beta} L^{1-\alpha-\beta} = \bar{Y}$$

Er dette et kostnadsminimeringsproblem eller et profittmaksimeringsproblem? Hvorfor? Sett opp Lagrange-funksjonen og finn førsteordensbetingelsene.

b) Vis at førsteordensbetingelsene kan skrives som

$$\frac{K}{E} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{C'_E(K,E,L)}{C'_K(K,E,L)}$$
$$\frac{L}{E} = \frac{1-\alpha-\beta}{\beta} \frac{C'_E(K,E,L)}{C'_L(K,E,L)}$$

La heretter kostnadsfunksjonen ta følgende form:

$$C(K, E, L) = qK + rE + wL \tag{4}$$

c) Uten å løse problemet på nytt, finn betinget faktoretterspørsel etter energi, $E^*(q, r, w, \bar{Y})$. Du kan anta at stasjonærpunktet er et optimum.

d) Finn elastisiteten til etterspørselen etter energi mhp. energiprisen ($r$). (Hint: Start med å vise at $\frac{\partial E^*}{\partial r} = \gamma \frac{E^*}{r}$, der $\gamma$ er et konstantledd som består av parametere i modellen.)

**Oppgave 5** (av 5) (15 av 100 poeng)
Betrakt følgende nivåkurve:

$$h(x, y) = \ln(xg(y)) + xg(y) = c$$

der $y'(x) < 0$.

a) Vis at $y'(x) = -\frac{g(y)}{xg'(y)}$. (Hint: Her trenger du definisjonsområdet til funksjonen.)

b) Er $g(y)$ stigende eller fallende? Begrunn svaret ditt. (Hint: Ta definisjonsområdet til funksjonen i betraktning, og husk at $y'(x) < 0$).

Anta at $g(y) = y^a$, der $y > 0$ og $a$ er en konstant.

c) Er nivåkurven $y(x)$ konveks eller konkav? (Hint: Bruk resultatet ditt i oppgave (b)).

d) Tegn en skisse av nivåkurven når $c = 2$ og $a = 1$, som tilfredsstiller de egenskapene du har funnet tidligere i oppgaven. Vær obs på definisjonsområdet til funksjonen, og bruk at verdimengden til funksjonen er $y \in (0, \infty)$. Du trenger ikke regne ut $x$- eller $y$-verdier i enkeltpunkter i denne oppgaven.