

Sensorveiledning

Høst 2022: Utsatt eksamen

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 5) (20 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2x^{-\frac{1}{2}}$

b) $g(x) = x^3 \ln x$

c) $h(x) = \frac{x^4}{g(x)}$, der $g(x)$ er fra oppgave b)

d) $u(v, w) = x(y)$, der $x(y) = y^2$ og $y = v - w$

Svar:

a) $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x^{-\frac{3}{2}}$

b) $g'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1)$

c) $h'(x) = \frac{4x^3 g(x) - x^4 g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

d) $\frac{\partial u}{\partial v} = x'(y) \frac{\partial y}{\partial v} = 2(v - w)$
 $\frac{\partial u}{\partial w} = x'(y) \frac{\partial y}{\partial w} = -2(v - w)$

Oppgave 2 (av 5) (20 av 100 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) $\sum_{i=1}^5 i^2 + \sum_{i=6}^{10} (-i)^2 = \sum_{i=1}^{10} i^2$

b) Problemet

$$\max_{x,y} f(x,y) = |x| + |y|$$

har ett globalt minimumspunkt der $x = y = 0$.

c) Funksjonen $h(x)$ fra oppgave 1 c) har et stasjonærpunkt der $x = 1$.

d) Anta at $F(K, L)$ er homogen av grad én, slik at vi har følgende relasjon:

$$F(tK, tL) = tF(K, L) \quad (1)$$

Da er de partiellderiverte mhp. K og L er homogene av grad null (altså at $\frac{\partial F(tK, tL)}{\partial K} = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}$ og $\frac{\partial F(tK, tL)}{\partial L} = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$). (Hint: Bruk implisitt derivasjon av likning (1) til å finne de partiellderiverte.)

Svar:

a) Sant. Vesentlig her er å skjønne at $(-i)^2 = i^2 \forall i$. Kan f.eks. vises enten ved å skrive ut summen. Mange svar bør imidlertid gis full uttelling her, så lenge fremgangsmåten/resonnementet fremgår tydelig.

b) Sant. Funksjonen er ikke deriverbar i punktet $(0,0)$, men er avtakende før dette punktet og stigende etter. Mange svar bør gis full uttelling her, så lenge fremgangsmåten/resonnementet fremgår tydelig.

c) Usant. Fra oppgave 1c) får vi FOB:

$$h'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\ln x - 1 = 0$$

$$x = e$$

$h(x)$ har altså ett indre stasjonærpunkt der $x = e$, men ingen der $x = 1$.

d) Sant. Dette følger av Eulers teorem. Viser her for K :

Deriverer først likning (1) mhp. K (på begge sider av likhetstegnet):

$$\begin{aligned} F(tK, tL) &= tF(K, L) \\ t \frac{\partial F(tK, tL)}{\partial K} &= t \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \\ \frac{\partial F(tK, tL)}{\partial K} &= \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = t^0 \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \end{aligned}$$

Ergo er $\frac{\partial F(K, L)}{\partial K}$ homogen av grad null.

Her må studentene se at når de partiellderiverer $F(tK, tL)$ mhp. K må de bruke kjerneregelen, slik at resultatet på venstresiden blir som over.

Oppgave 3 (av 5) (10 av 100 poeng)

Betrakt følgende funksjon:

$$f(x) = e^x(3 - x^2) \quad (2)$$

Finn og klassifiser alle funksjonens ekstrempunkt. Kan du si om ekstrempunktene er lokale eller globale?

Svar: FOB:

$$f'(x) = e^x(3 - x^2) - 2xe^x = -\underbrace{e^x}_{\neq 0}(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

AOB:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^x(x^2 + 2x - 3) - e^x(2x + 2) \\ &= -e^x(x^2 + 2x - 3 + 2x + 2) \\ &= -e^x(x^2 + 4x - 1) \end{aligned}$$

$f(x)$ er hverken globalt konveks eller globalt konkav. Sjekker derfor hvert enkelt punkt:

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= -e^{-3}((-3)^2 + 4(-3) - 1) \\ &= 4e^{-3} > 0 \\ f''(x_2) &= -e^1(1^2 + 4 - 1) \\ &= -4e < 0 \end{aligned}$$

Altså er $x_1 = -3$ et lokalt minimumspunkt og $x_2 = 1$ et lokalt maksimumspunkt.

Grafisk kan man se at $x_2 = 1$ er et *globalt* maksimumspunkt, men studentene er ikke forventet å gå utover andreordensbetingelsen for å vise dette.

Oppgave 4 (av 5) (15 av 100 poeng)

Nyttefunksjonen $u(c_1, c_2)$ beskriver en konsumenters preferanser over konsumgodene c_1 og c_2 (der $c_1, c_2 > 0$). Nyttefunksjonen kan representeres i to dimensjoner som nivåkurver, der $u(c_1, c_2) = \bar{u}$ og $\bar{u}$ er et konstant nyttenivå. Nyttefunksjonen er strengt stigende og strengt konkav i både c_1 og c_2 .

Dermed vet vi at nivåkurvene $c_2(c_1)$ er globalt strengt avtakende og globalt strengt konvekse.

- a) Tegn en skisse av tre nivåkurver for $u(c_1, c_2)$, for nyttenivåene $\bar{u}_3 > \bar{u}_2 > \bar{u}_1$ som passer med beskrivelsen i oppgaveteksten over.
- b) Betrakt det betingede nyttemaksimeringsproblemet

$$\max_{c_1, c_2} u(c_1, c_2) \quad \text{gitt at} \quad p_1 c_1 + p_2 c_2 = m \quad (3)$$

der $p_1, p_2, m > 0$. Dette problemet har en løsning, (c_1^*, c_2^*) , som tilfredsstiller budsjettbetingelsen $p_1 c_1 + p_2 c_2 = m$. Anta videre at $u(c_1^*, c_2^*) = \bar{u}_2$, altså at $\bar{u}_2$ er det høyeste nyttenivået konsumenten kan oppnå når bibetingelsen må være tilfredsstilt. Tegn budsjettbetingelsen og punktet (c_1^*, c_2^*) i samme diagram som nivåkurvene i oppgave a).

(Hint: Budsjettbetingelsen kan løses for c_2 , og blir da en lineær funksjon av c_1 .)

Svar:

- a) Se figur 1a.

I denne oppgaven er det særlig to ting å se etter: (i) At studentene tegner nivåkurver som er strengt avtakende og strengt konvekse, for positive verdier av c_1, c_2 (dette burde alle klare), og (ii) at studentene forstår at nivåkurvene med høyere nyttenivå ligger høyere i diagrammet. Dette fremgår av oppgaveteksten (nyttens er stigende i c_1 og c_2), og har også normalen for nivåkurver de har sett i undervisningen.

- b) Dette har vært gjennomgått i forelesning, men ikke fått mye fokus. Det tester derfor intuisjon for nivåkurver og betingede optimeringsproblemer. Det kan

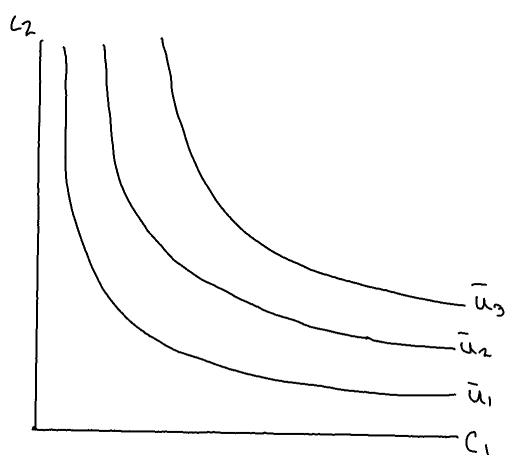
derfor betraktes som en vanskelig oppgave. I figuren (se figur 1b) skal budsjettbetingelsen tangere nivåkurven $\bar{u}_2$, som definerer punktet (c_1^*, c_2^*) .

Løser budsjettbetingelsen for c_2 for å finne den rette linja for budsjettbetingelsen i c_1, c_2 -diagrammet:

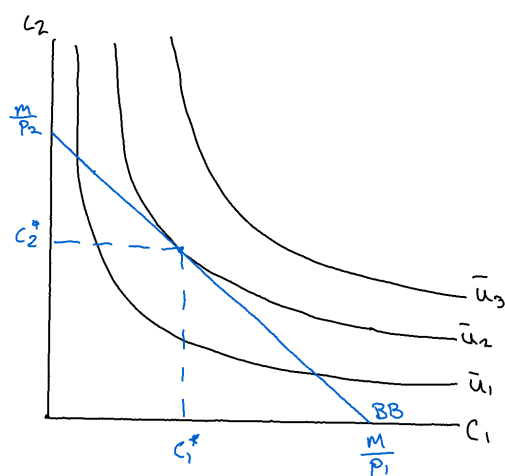
$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = m$$

$$p_2 c_2 = m - p_1 c_1$$

$$c_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} c_1$$



(a) Oppgave 4a



(b) Oppgave 4b

Oppgave 5 (av 5) (35 av 100 poeng)

En bedrift har en produktfunksjon,

$$F(K, L) = (K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \quad (4)$$

der $\alpha \in (0, 1)$ og $K, L > 0$.

- a) Finn funksjonens førstederiverte. Har $F(K, L)$ et maksimumspunkt?
- b) Er $F(K, L)$ homogen? I så fall, av hvilken grad?
- c) Finn differensialet til $F(K, L)$.

Anta heretter at bedriften har en kostnadsfunksjon, $C(K, L) = rK + wL$, og ønsker å maksimere profitten ved å løse følgende kostnadsminimeringsproblem:

$$\min_{K, L} C(K, L) \quad \text{gitt at} \quad F(K, L) = \bar{Y} \quad (5)$$

- d) Sett opp Lagrange-funksjonen og finn førsteordensbetingelsene. Vis at førsteordensbetingelsene kan skrives om til

$$\frac{r}{w} = \left(\frac{K}{L} \right)^{\gamma-1} \quad (6)$$

- e) Vis at $L^* = \left(\left(\frac{r}{w} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha}}$
- f) La $A \equiv \frac{r}{w}$ og $B \equiv \frac{K}{L}$. Da kan substitusjonselastisiteten σ defineres som $\sigma = El_A B$. Bruk (6) til å finne et uttrykk for B som avhenger av A , og vis at $\sigma = \frac{1}{\gamma-1}$.
- g) Hvordan endres kostnadene $C(K, L)$ hvis leieprisen på kapital øker, eller bedriften bestemmer seg for å øke produksjonen? Du kan enten oppgi svaret som funksjon av λ , eller av parameterne i modellen. (*Hint: Du kan bruke det generelle omhyllingsteoremet til å finne $\frac{dC(K^*, L^*)}{dr}$ og $\frac{dC(K^*, L^*)}{dY}$.*)

Svar:

a)

$$F'_K = \alpha(K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} K^{\gamma-1}$$

$$F'_L = \alpha(K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} L^{\gamma-1}$$

b) Prøver FOB:

$$F'_K = \underbrace{\alpha}_{\in(0,1)} (\underbrace{K^\gamma}_{>0} + \underbrace{L^\gamma}_{>0})^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} \underbrace{K^{\gamma-1}}_{>0} > 0$$

$$F'_L = \underbrace{\alpha}_{\in(0,1)} (\underbrace{K^\gamma}_{>0} + \underbrace{L^\gamma}_{>0})^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} \underbrace{L^{\gamma-1}}_{>0} > 0$$

Altså holder aldri FOB for noen verdier av K eller L , og funksjonen har ingen indre stasjonærpunkt. Den er definert for $K, L > 0$ og maksimeringsproblemet har derfor heller ingen hjørneløsninger. Intuitivt: Produksjonen øker så lenge bedriften øker bruken av en eller flere innsatsfaktorer.

c) Homogen av grad α :

$$\begin{aligned} F(tK, tL) &= ((tK)^\gamma + (tL)^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \\ &= (t^\gamma K^\gamma + t^\gamma L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \\ &= t^\alpha (K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \\ &= t^\alpha F(K, L) \end{aligned}$$

d) $dF = F'_K dK + F'_L dL = \alpha(K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} (K^{\gamma-1} dK + L^{\gamma-1} dL)$

e) Lagrange: $\mathcal{L}(K, L) = rK + wL - \lambda [F(K, L) - \bar{Y}]$

FOB:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda F'_K = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda F'_L = 0$$

$$\frac{r}{w} = \left(\frac{K}{L} \right)^{\gamma-1} \tag{6}$$

$$(K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} = \bar{Y} \tag{7}$$

f) Løser (6) for K og setter inn i (7). Løser til slutt for L .

$$\begin{aligned}\frac{r}{w} &= \frac{F'_K(K, L)}{F'_L(K, L)} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma-1} \\ K &= \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} L \\ (K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} &= \bar{Y} \\ \left(\left[\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} L\right]^\gamma + L^\gamma\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} &= \bar{Y} \\ L^\alpha \left(\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} &= \bar{Y} \\ L^* &= \left(\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha}}\end{aligned}$$

g) Substitusjonselastisiteten blir $\sigma = \frac{A}{B} \frac{\partial B}{\partial A}$. Løser først (6) for B , og deriverer mhp. A :

$$\begin{aligned}A &= B^{\gamma-1} \\ B &= A^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \frac{\partial B}{\partial A} &= \frac{1}{\gamma-1} A^{\frac{1}{\gamma-1}-1} \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \underbrace{A^{\frac{1}{\gamma-1}}}_B A^{-1} \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \frac{B}{A} \\ \sigma &= \frac{A}{B} \frac{\partial B}{\partial A} \\ &= \frac{A}{B} \frac{1}{\gamma-1} \frac{B}{A} \\ &= \frac{1}{\gamma-1}\end{aligned}$$

h) Setter først opp Lagrange-funksjonen i optimumspunktet:

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}(K^*, L^*) = rK^* + wL^* - \lambda((K^*)^\gamma + (L^*)^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

Det generelle omhyllingsteoremet gir da

$$\begin{aligned}\frac{dC(K^*, L^*)}{dr} &= \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial r} = K^* \\ \frac{dC(K^*, L^*)}{d\bar{Y}} &= \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \bar{Y}} = \lambda\end{aligned}$$
