

Oppgave 1 (av 5) (20 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2x^{-\frac{1}{2}}$

b) $g(x) = x^3 \ln x$

c) $h(x) = \frac{x^4}{g(x)}$, der $g(x)$ er fra oppgave b)

d) $u(v, w) = x(y)$, der $x(y) = y^2$ og $y = v - w$

Oppgave 2 (av 5) (20 av 100 poeng)

Er følgende sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) $\sum_{i=1}^5 i^2 + \sum_{i=6}^{10} (-i)^2 = \sum_{i=1}^{10} i^2$

b) Problemet

$$\max_{x,y} f(x,y) = |x| + |y|$$

har ett globalt minimumspunkt der $x = y = 0$.

c) Funksjonen $h(x)$ fra oppgave 1 c) har et stasjonærpunkt der $x = 1$.

d) Anta at $F(K, L)$ er homogen av grad én, slik at vi har følgende relasjon:

$$F(tK, tL) = tF(K, L) \tag{1}$$

Da er de partiellderiverte mhp. K og L er homogene av grad null (altså at $\frac{\partial F(tK, tL)}{\partial K} = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}$ og $\frac{\partial F(tK, tL)}{\partial L} = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$). (*Hint: Bruk implisitt derivasjon av likning (1) til å finne de partiellderiverte.*)

Oppgave 3 (av 5) (10 av 100 poeng)

Betrakt følgende funksjon:

$$f(x) = e^x (3 - x^2) \quad (2)$$

Finn og klassifiser alle funksjonens stasjonærpunkt. Kan du si om ekstrempunktene er lokale eller globale?

Oppgave 4 (av 5) (15 av 100 poeng)

Nyttefunksjonen $u(c_1, c_2)$ beskriver en konsuments preferanser over konsumgodene c_1 og c_2 (der $c_1, c_2 > 0$). Nyttefunksjonen kan representeres i to dimensjoner som nivåkurver, der $u(c_1, c_2) = \bar{u}$ og $\bar{u}$ er et konstant nyttenivå. Nyttefunksjonen er strengt stigende og strengt konkav i både c_1 og c_2 .

Dermed vet vi at nivåkurvene $c_2(c_1)$ er globalt strengt avtakende og globalt strengt konvekse.

- a) Tegn en skisse av tre nivåkurver for $u(c_1, c_2)$, for nyttenivåene $\bar{u}_3 > \bar{u}_2 > \bar{u}_1$ som passer med beskrivelsen i oppgaveteksten over.
- b) Betrakt det betingede nyttemaksimeringsproblemet

$$\max_{c_1, c_2} u(c_1, c_2) \quad \text{gitt at} \quad p_1 c_1 + p_2 c_2 = m \quad (3)$$

der $p_1, p_2, m > 0$. Dette problemet har en løsning, (c_1^*, c_2^*) , som tilfredsstiller budsjettbetingelsen $p_1 c_1 + p_2 c_2 = m$. Anta videre at $u(c_1^*, c_2^*) = \bar{u}_2$, altså at $\bar{u}_2$ er det høyeste nyttenivået konsumenten kan oppnå når bibetingelsen må være tilfredsstilt. Tegn budsjettbetingelsen og punktet (c_1^*, c_2^*) i samme diagram som nivåkurvene i oppgave a).

(Hint: Budsjettbetingelsen kan løses for c_2 , og blir da en lineær funksjon av c_1 .)

Oppgave 5 (av 5) (35 av 100 poeng)

En bedrift har en produktfunksjon,

$$F(K, L) = (K^\gamma + L^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \quad (4)$$

der $\alpha \in (0, 1)$ og $K, L > 0$.

- a) Finn funksjonens førstederiverte. Har $F(K, L)$ et maksimumspunkt?
- b) Er $F(K, L)$ homogen? I så fall, av hvilken grad?
- c) Finn differensialet til $F(K, L)$.

Anta heretter at bedriften har en kostnadsfunksjon, $C(K, L) = rK + wL$, og ønsker å maksimere profitten ved å løse følgende kostnadsminimeringsproblem:

$$\min_{K, L} C(K, L) \quad \text{gitt at} \quad F(K, L) = \bar{Y} \quad (5)$$

- d) Sett opp Lagrange-funksjonen og finn førsteordensbetingelsene. Vis at førsteordensbetingelsene kan skrives om til

$$\frac{r}{w} = \left(\frac{K}{L} \right)^{\gamma-1} \quad (6)$$

- e) Vis at $L^* = \left(\left(\frac{r}{w} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \bar{Y}^{\frac{1}{\alpha}}$
- f) La $A \equiv \frac{r}{w}$ og $B \equiv \frac{K}{L}$. Da kan substitusjonselastisiteten σ defineres som $\sigma = El_A B$. Bruk (6) til å finne et uttrykk for B som avhenger av A , og vis at $\sigma = \frac{1}{\gamma-1}$.
- g) Hvordan endres kostnadene $C(K, L)$ hvis leieprisen på kapital øker, eller bedriften bestemmer seg for å øke produksjonen? Du kan enten oppgi svaret som funksjon av λ , eller av parameterne i modellen. (*Hint: Du kan bruke det generelle omhyllingsteoremet til å finne $\frac{dC(K^*, L^*)}{dr}$ og $\frac{dC(K^*, L^*)}{dY}$.*)