Sensorveiledning

Høst 2023 - Utsatt

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, *må* utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 5) (15 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

a) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2}$

b) $f(k) = (k+2)ln(2k)$

c) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{3x+2x^2}$

d) $f(s,p) = (s+p)^{\frac{3}{2}}(2sp)(s+p)$

Svar:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2} = \frac{x}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}$

b) $f'(k) = \frac{1}{2k}2(k+2) + ln(2k)(1) = \frac{k+2}{k} + ln(2k)$

c) $f'(x) = \frac{e^{x^2}2x(3x+2x^2) - e^{x^2}(3+4x)}{(3x+2x^2)^2} = \frac{e^{x^2}(4x^3+6x^2-4x-3)}{(3x+2x^2)^2}$

d) $f(s,p) = (s+p)^{\frac{3}{2}}(2sp)(s+p) = (s+p)^{5/2}(2sp)$
$f'_s = \frac{5}{2}(s+p)^{3/2}(2sp) + (s+p)^{5/2}2p$
$f'_p = \frac{5}{2}(s+p)^{3/2}(2sp) + (s+p)^{5/2}2s$

Oppgave 2 (av 5) (30 av 100 poeng)

Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

a) Dersom punktet c er et lokalt maksimumspunkt for en funksjon $f(x)$, så vet vi at $f'(x)$ skifter fortegn på hver side av c og at f''(c)=0

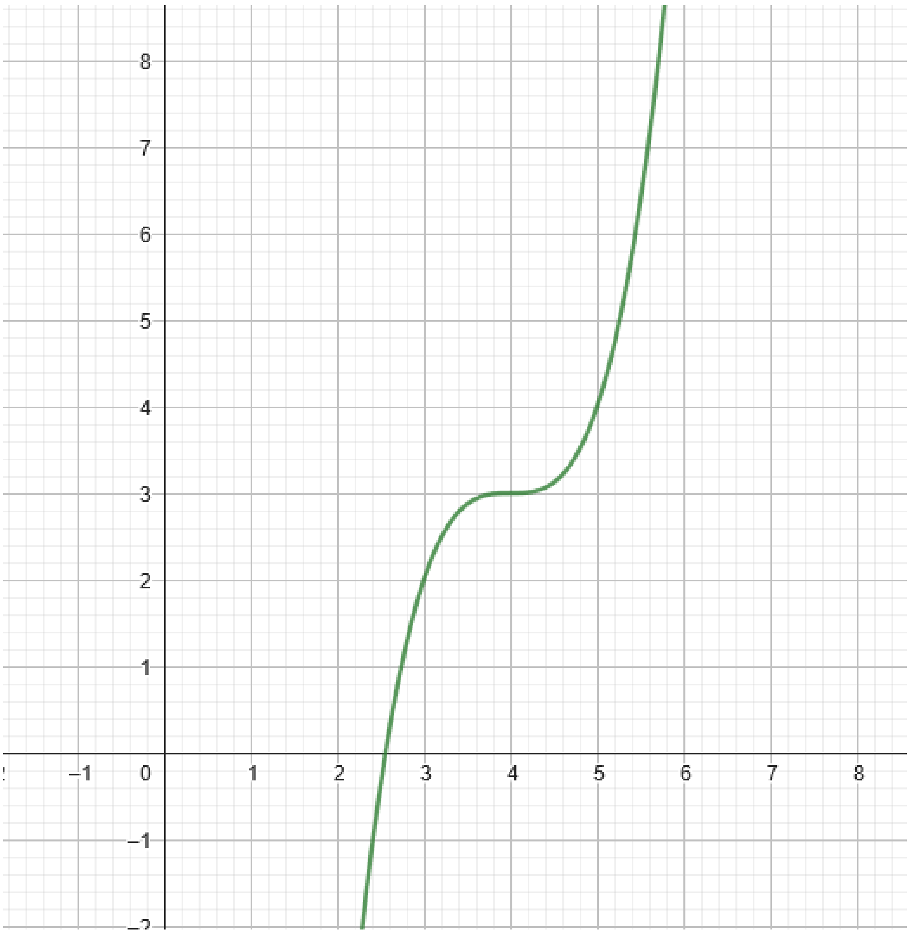
b) Elastisiteten til $f(x) = x^2 + x^4$ med hensyn på x er $\frac{2x^2+4x^4}{x^2+x^4}$.

c) Et likningssystem med 3 variable og to likninger har ingen løsning.

d) Funksjonen $f(x) = ln(x^2)$ har ingen invers.

e) Dersom $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ er $(f^{-1})'(-1) = 0$, der f^{-1} er den inverse funksjonen til f.

f) Funksjonen $f(x)$ avbildet nedenfor har $f'(3) > 0$ og $f''(3) < 0$:



Svar:

a) Feil, det stemmer at den førstederiverte vil skifte fortegn, den vil henholdsvis være negativ for x-verdi litt lavere enn c og positiv for x-verdi litt større enn c. Men den andrederiverte i punktet c vil være negativ, ikke 0.

b) Riktig. Her kan man enten bruke definisjonen av elastistet eller regel for elastisitet til sum av funksjoner. $El_x f = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{x^2+x^4}(2x + 4x^3) = \frac{2x^2+4x^4}{x^2+x^4}$

c) Feil, et likningssystem med 3 variable og to likninger har en frihetsgrad, dvs. at systemet løses ved å fastlegge verdien på en av variablene.

d) Sant. Viser at funksjonen verken er strengt stigende eller avtakende ved å derievere: $f'(x) = \frac{1}{x^2} 2x = \frac{2}{x}$, som er positiv for x>0 og negativ for x<0.

e) Feil. Den deriverte av den inverse er gitt ved $\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{2}{(x+1)^2}} = \frac{(x+1)^2}{2}$. For å evaluere i $y = -1$ må vi finne korresponderende x-verdi: $-1 = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$.
$(f^{-1})'(-1) = \frac{(\frac{-1}{3}+1)^2}{2} = \frac{2^2}{3^2 2} = \frac{2}{9}$
.

f) Sant. Funksjonen avbildet er $(x-4)^3 + 3$. Funksjonen stiger i regionen til venstre for $x = 4$ og har derfor $f'(3) > 0$. Samtidig er funksjonen konkav i denne regionen og vi har derfor $f''(3) < 0$.

Oppgave 3 (av 5) (20 av 100 poeng)

Gitt funksjonen $f(x,y) = -x^4a + 2x^2 + y^2$ der a er en konstant forskjellig fra 0.

a) Sett opp førsteordensbetingelsene for funksjonen og finn eventuelle stasjonærpunkter.

b) Bruk andreordensbetingelsen til å klassifisere stasjonærpunktene..

Svar:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3a + 4x = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$

b) Fra likning 2 har vi at $y = 0$.
Løser likning 1 for x: $4x(1 - x^2a) = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $x = \pm(\frac{1}{a})^{\frac{1}{2}}$
For klassifisering, AOB:
$f''_{xx} = -12x^2a + 4$
$f''_{yy} = 2$
$f''_{xy} = 0$
Case 1: $(0, 0)$
$f''_{xx} > 0$, $f''_{yy} > 0$ og $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$. Lokalt minimumspunkt.

Case 2: $((\frac{1}{a})^{\frac{1}{2}}, 0)$
$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -8 \cdot 2 - 0 < 0$. Sadelpunkt.

Case 3: $((-\frac{1}{a})^{\frac{1}{2}}, 0)$
$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -8 \cdot 2 - 0 < 0$. Sadelpunkt.

Oppgave 4 (av 5) (20 av 100 poeng)

Gitt funksjonen $h(x, y) = x^3 + 2xy + y - 3x$. Videre er y en funksjon av x, definert ved $y = x^2 - 3x$

a) Finn den partiellderiverte med hensyn på alle argumenter for funksjonen h(x,y).

b) Finn den totalderiverte av funksjonen h(x,y) med hensyn på x.

c) Definer en ny funksjon $g(x, y) = h'_x$. Sett inn $y = x^2 - 3x$ i g slik at du får en funksjon med bare x som variabel. Finn eventuelle ekstrempunkt for funksjonen og klassifiser.

Svar:

a) $h'_x = 3x^2 + 2y - 3$
$h'_y = 2x + 1$

b) $\frac{dh}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 + 2y - 3 + (2x + 1)(2x - 3) = 7x^2 - 4x + 2y + 3$

c) Den nye funksjonen $g(x, y) = 3x^2 + 2y - 3$. Setter inn for y og får $g(x) = 3x^2 + 2x^2 - 6x - 3 = 5x^2 - 6x - 3$
FOB:
$g'(x) = 10x - 6 = 0$
Stasjonærpunkt for $x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
AOB:
$g''(x) = 10 > 0$
Funksjonen er globalt konveks. Dermed er $x = \frac{3}{5}$ et globalt minimumspunkt.

Oppgave 5 (av 5) (15 av 100 poeng)

Gitt funksjonen $f(x, y) = \frac{x^3+xy^2+y^3}{x^2+y^2}$

a) Bestem om funksjonen av homogen og i så fall av hvilken grad.

b) Se for deg at funksjonen $f(x, y)$ beskriver antall produserte enheter for en bedrift med innsatsfaktorer x og y. Bedriften klarer å produsere 1000 enheter når $x = 1000$ og $y = 1500$. Hvor mange enheter produserer bedriften om innsatsfaktorene øker til $x = 2000$ og $y = 3000$?

Svar:

a) $f(tx, ty) = \frac{(tx)^3+tx(ty)^2+(ty)^3}{(tx)^2+(ty)^2} = \frac{t^3(x)^3+t^3(xy^2)+t^3(y)^3}{t^2(x^2+y^2)} = tf(x, y)$
Funksjonen er homogen av grad 1.

b) En t-dobling av innsatsfaktorene der $t = 2$. Funksjonen av homogen av grad 1, som vil si at t-dobling av innsatsfaktorer gir t-dobling av funksjonsverdien. Bedriften produserer $2 \cdot 1000 = 2000$ enheter etter en dobling av innsatsfaktorene.
