

ECON1100 Utsatt Eksamen Høsten 2024 – Sensorveiledning

Generelle merknader

- Forståelse og rett fremgangsmåte er avgjørende for poenggivingen.
- Mindre regnefeil gir mindre (men ikke store) poengfratrekk.
- All riktig fremgangsmåte bør gi uttelling, også dersom det er gjort feil lenger ned i samme oppgave.
- Det skal ikke gis trekk for følgefeil. Det kan likevel gis noe trekk dersom feilen gjør videre utregning betydelig lettere.
- Dersom oppgaven ber om begrunnelse for et resultat, må utregning/redegjørelse vises for uttelling.
- Det stilles ikke strenge krav til formen svaret gis på, men åpenbar forenkling skal gjøres for full uttelling. Der det i sensorveiledningen oppgis flere former er det for å lettere kunne gjenkjenne ulike, men korrekte besvarelser. Det er som hovedregel ikke nødvendig å skrive det på den siste av disse formene for full uttelling.
- Oppgavenes poeng skal fordeles likt mellom hver deloppgave.

Oppgave 1 (av 5) (15 av 100 poeng)

Finn de førsteordens deriverte til følgende funksjoner med hensyn på alle variabler.

- $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + x$
- $g(k) = (3k + 1) \ln(k^2)$
- $h(x) = \frac{x^2+3}{2+\sqrt{2}}$
- $p(s, t) = e^{st}(s^2 + t^2)$

Svar:

- $f'(x) = 15x^2 - 8x + 1$
- $g'(k) = 3 \ln(k^2) + (3k + 1) \cdot \frac{d}{dk}(\ln(k^2)) = 3 \ln(k^2) + (3k + 1) \cdot \frac{2}{k} = 3 \ln(k^2) + \frac{6k+2}{k} = 3 \ln(k^2) + 6 + \frac{2}{k}$
- $h'(x) = \frac{2x}{2+\sqrt{2}}$
- d)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(e^{st})(s^2 + t^2) + e^{st} \frac{\partial}{\partial s}(s^2 + t^2) \\ &= te^{st}(s^2 + t^2) + e^{st}(2s) = e^{st}(t(s^2 + t^2) + 2s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(e^{st})(s^2 + t^2) + e^{st} \frac{\partial}{\partial t}(s^2 + t^2) = se^{st}(s^2 + t^2) + e^{st}(2t) \\ &= e^{st}(s(s^2 + t^2) + 2t)\end{aligned}$$

Oppgave 2 (av 5) (30 av 100 poeng)

Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

- En funksjon $f(x)$ har et globalt maksimum i et punkt der $f'(x) = 0$ og $f''(x) > 0$.
- Hvis $f(x, y) = x^2 + y^2$, har nivåkurvene alltid en positiv helning.
- Grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2^i$ konvergerer mot en endelig verdi.
- En funksjon kan være konveks uten å ha et globalt minimum.
- Hvis $f(x) = e^x$, har den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$ en derivert gitt ved $\frac{1}{e^x}$.

Svar:

- Usant. For at $f(x)$ skal ha et lokalt maksimum i et punkt, må $f'(x) = 0$ (kritisk punkt) og $f''(x) < 0$. For at dette i tillegg skal være globalt må det være tilfellet at $f(x) < f(x^*)$, hvor x^* er det globale maksimumet.
- Usant. Nivåkurvene for $f(x, y) = k$ gir ligningen $x^2 + y^2 = k$, som representerer sirkler med sentrum i origo, og helningen til denne nivåkurven kan være positiv eller negativ, avhengig av (x, y) .
- Usant. Denne summen divergerer, fordi $\sum_{i=1}^n 2^i = 2(2^n - 1)$ som går mot uendelig når $n \rightarrow \infty$.
- Sant. Et eksempel er $f(x) = e^x$, som er konveks, men uten å ha noe globalt minimum.
- Usant. Den inverse funksjonen er $f^{-1}(x) = \ln(x)$ med derivert $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x}$. Det som hadde vært sant er at i et punkt $x = a$ vil $f'(a) = e^a$ være lik $\frac{1}{(f^{-1})'(f(a))} = \frac{1}{\frac{1}{e^a}} = e^a$.

Oppgave 3 (av 5) (20 av 100 poeng)

En økonom vurderer en nyttefunksjon gitt ved $U(x, y) = \ln(x) + \delta \ln(y)$ under bibetingelsen $p_1x + p_2y = m$ (hvor $\delta > 0$ er en konstant).

- Sett opp Lagrange-funksjonen og utled førsteordensbetingelsene.
- Anta at $m = p_2\sqrt{2}$. Løs systemet for å finne optimal etterspørsel etter vare x og vare y , $x^*(p_1, p_2, m, \delta)$ og $y^*(p_1, p_2, m, \delta)$.
- Bruk andreordensbetingelsen til å klassifisere stasjonærpunktene som maksimum, minimum, eller sadelpunkt for $U(x, y)$.
- Bruk omhyllingsteoremet til å finne et tilnærmet uttrykk for nytten av en inntektsøkning fra $m = p_2\sqrt{2}$ til $m = p_2\sqrt{2} + \epsilon$, hvor $\epsilon > 0$ er en positiv konstant.

Svar:

- a) Lagrange-funksjonen er gitt ved

$$L(x, y, \lambda) = \ln(x) + \delta \ln(y) + \lambda(m - p_1x - p_2y)$$

med førsteordensbetingelser

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{1}{x} - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{p_1 x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\delta}{y} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\delta}{p_2 y} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= m - p_1 x - p_2 y = 0\end{aligned}$$

Studentene trenger ikke liste opp $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ så lenge de gjør det klart at bibetingelsen må tas i betraktning når man finner løsningen.

- b) Førsteordensbetingelsene gir oss

$$\lambda = \frac{1}{p_1 x} = \frac{\delta}{p_2 y} \Rightarrow y = \frac{p_1}{p_2} \delta x$$

Vi setter dette inn i bibetingelsen og får

$$p_1 x + p_1 \delta x = m \Rightarrow p_1(1 + \delta)x = m \Rightarrow x^*(p_1, p_2, m, \delta) = \frac{1}{1 + \delta} \frac{m}{p_1}$$

Setter dette inn i $y = \frac{p_1}{p_2} \delta x$ og får

$$y^*(p_1, p_2, m, \delta) = \frac{p_1}{p_2} \delta \frac{1}{1 + \delta} \frac{m}{p_1} = \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{m}{p_2}$$

- c) Andreordensbetingelsen gir oss

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\delta}{y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

Dermed er determinanten til Hessian-matrisen gitt ved

$$\frac{\delta}{x^2 y^2} > 0$$

for alle x i definisjonsmengden ($x > 0$). Dermed er løsningen vår et globalt maksimum.

- d) Omhyllingsteoremet sier at marginalnyttens av en inntektsøkning er $\frac{\partial U}{\partial m} = \frac{\partial L}{\partial m} = \lambda^*(p_1, p_2, m, \delta)$, hvor $\lambda^*(p_1, p_2, m, \delta)$ er Lagrange-multiplikatoren som korresponderer med den optimale løsningen fra oppgave b). Her kan vi for eksempel bruke

$$\lambda^*(p_1, p_2, m, \delta) = \frac{\delta}{p_2 y^*(p_1, p_2, m, \delta)} = \frac{\delta}{p_2 \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) \frac{m}{p_2}} = \frac{1 + \delta}{m}$$

Et tilnærmet uttrykk for inntektsøkningen, ϵ , er dermed gitt ved

$$\lambda^*(p_1, p_2, m, \delta) \epsilon = \frac{1 + \delta}{m} \epsilon > 0$$

Oppgave 4 (av 5) (20 av 100 poeng)

Gitt funksjonen $f(x, y) = 3x^2 - 7xy + 5y^2$:

- Finne de partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- La $f(x, y) = c$ og anta at y er en funksjon av x . Finn et uttrykk for $y'(x)$ når $f(x, y(x)) = c$. Her er $c > 0$ en positiv konstant.
- Finne stasjonærpunkter til $f(x, y)$.
- Er uttrykket du fant for $y'(x)$ definert i stasjonærpunkt(et/ene) til $f(x, y)$?

Svar:

a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 6x - 7y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -7x + 10y\end{aligned}$$

b) Vi kan bruke de partiellderiverte vi fant i forrige deloppgave og regne ut

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-6x + 7y}{7x - 10y}$$

c) Stasjonærpunktene er gitt ved

$$\begin{aligned}6x - 7y &= 0 \\ -7x + 10y &= 0\end{aligned}$$

Vi ser at $(x_1, y_1) = (0, 0)$ er et stasjonærpunkt. Så har vi også

$$\begin{aligned}6x = 7y &\Rightarrow x = \frac{7}{6}y \\ \Rightarrow -7\left(\frac{7}{6}y\right) + 10y &= -\frac{49}{6}y + 10y = \frac{11}{6}y = 0\end{aligned}$$

Dermed er $(x_1, y_1) = (0, 0)$ det eneste stasjonærpunktet.

d) Nei, uttrykket for $y'(x)$ er ikke definert i et stasjonærpunkt fordi $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ i et stasjonærpunkt. Dette innebærer å dele på 0 og er ikke tillatt. Vi kan bekrefte dette i denne settingen ved å sette inn $x = y = 0$ og se at nevneren, $7x - 10y$, blir 0.

Oppgave 5 (av 5) (15 av 100 poeng)

En produktfunksjon er gitt ved $P(x, y) = (x^\sigma + y^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}$.

- Undersøk om funksjonen er homogen, og angi i så fall av hvilken grad.
- Produksjonen er 500 enheter når $x = 100$ og $y = 100$ (altså $P(100, 100) = 500$). Finn et uttrykk for σ . Hint: Det er helt greit å ha logaritmer i svaret.

- c) Hvis produksjonen er 500 enheter når $x = 100$ og $y = 100$, hva blir produksjonen hvis begge innsatsfaktorer dobles?

Svar:

- a) For å sjekke om funksjonen er homogen multipliserer vi x og y med t :

$$P(tx, ty) = (t^\sigma x^\sigma + t^\sigma y^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} = t(x^\sigma + y^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} = tP(x, y)$$

Funksjonen er homogen av grad 1.

- b) Når $x = y = 100$ er produksjonen $P(100, 100) = 500$.

$$(100^\sigma + 100^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} = 500$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} \ln(2 \cdot 100^\sigma) = \ln 500$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} \ln 2 + \frac{1}{\sigma} \ln(100^\sigma) = \ln 500$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} \ln 2 + \ln 100 = 500 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \ln 2 = \ln 500 - \ln 100 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \ln 2 = \ln \left(\frac{500}{100} \right) = \ln 5$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\ln 2}{\ln 5}$$

- c) I og med at funksjonen er homogen av grad 1 så vet vi at en dobling i mengden innsatsfaktorer (x og y) gir dobling i antall produserte enheter. Dermed vet vi at antall enheter er lik 1000 når $x = y = 200$, $P(200, 200) = 1000$.