

Eksamen ECON1100 - Høst 2025

Sensorveiledning

Oppgave 1 (15 poeng)

Finn de førsteordens partiellderiverte av følgende funksjoner med hensyn på alle argumenter.

(a) $f(x, y) = 3x^2y - 5y^3 + 4x$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$

(c) $f(x, y) = e^{xy} + \ln(x^2 + y^2)$

Svar:

(a) $f'_x(x, y) = 6xy + 4$, $f'_y(x, y) = 3x^2 - 15y^2$

(b)

$$\begin{aligned}g(u) &= \sqrt{u} = u^{1/2} \\g'(u) &= \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \\u(x, y) &= x^2 + y^3 \\u'_x(x, y) &= 2x \\u'_y(x, y) &= 3y^2 \\f'_x(x, y) &= g'(u) \cdot u'_x(x, y) \\&= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x \\&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot 2x \\&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} \\f'_y(x, y) &= g'(u) \cdot u'_y(x, y) \\&= \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}\end{aligned}$$

(c) $f'_x(x, y) = ye^{xy} + \frac{2x}{x^2+y^2}$, $f'_y(x, y) = xe^{xy} + \frac{2y}{x^2+y^2}$

Oppgave 2 (15 poeng)

Sant eller usant? Begrunn svaret ditt.

- (a) Differensialet til $g(p, q) = p^2q + e^{pq}$ er gitt ved $dg = (2pq + q^2e^{pq})dp + (p^2 + p^2e^{pq})dq$.
- (b) Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$ i et punkt $x = x_0$, så vet vi at x_0 er et vendepunkt for $f(x)$.
- (c) $\int_0^2 (3x^2 - \frac{1}{2}x + 1) dx = 9$

Svar:

(a) USANT

Differensialet er gitt ved

$$dg = g'_p(p, q)dp + g'_q(p, q)dq$$

Finner de partiellderiverte:

$$g'_p(p, q) = 2pq + qe^{pq}$$

$$g'_q(p, q) = p^2 + pe^{pq}$$

Da får vi differensialet

$$dg = (2pq + qe^{pq})dp + (p^2 + pe^{pq})dq$$

(b) USANT. Et vendepunkt er der grafen går fra konveks til konkav, eller motsatt. Vi vil ha $f''(x_0) = 0$ hvis $x = x_0$ er et vendepunkt, men $f''(x_0) = 0$ betyr ikke nødvendigvis at $x = x_0$ er et vendepunkt. Ta for eksempel $f(x) = x^4$. Her har vi $f'(0) = 0$ og $f''(0) = 0$, men $x = 0$ er ikke et vendepunkt, siden $f(x)$ er konveks både for $x < 0$ og for $x > 0$. Sagt på en annen måte: i et vendepunkt bytter den andrederiverte fortegn. Det er ikke nok at den andrederiverte er lik null.

(c) SANT

Finner det ubestemte integralet:

$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) dx = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + C$$

Evaluerer:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) dx &= \left[\int \left(3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) dx \right]_0^2 \\ &= \left[2^3 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 + C \right] - \left[0^3 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 + 0 + C \right] \\ &= 8 - 1 + 2 + C - C \\ &= 9 \end{aligned}$$

Oppgave 3 (30 poeng)

En bedrift har produksjonsfunksjonen $Q(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, der $Q(K, L)$ er produsert kvantum, K er kapital, og L er arbeidskraft.

- (a) Er funksjonen $Q(K, L)$ homogen? Isåfall av hvilken grad?
- (b) Hva er den partielle elastisiteten til produksjon, Q , med hensyn på kapital, K ?

Anta nå at prisen på kapital er r , og prisen på arbeidskraft er w . Bedriften ønsker å produsere et gitt kvantum \bar{q} , og den ønsker å gjøre dette så billig som mulig. De ønsker altså å minimere kostnadene $rK + wL$, gitt at produksjon er lik \bar{q} , altså at $Q(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha} = \bar{q}$.

- (c) Sett opp Lagrange-funksjonen og utled førsteordensbetingelsene.
- (d) Vis at optimalt konsum av kapital og arbeidskraft, $K^*(\bar{q}, r, w)$ og $L^*(\bar{q}, r, w)$, er gitt ved

$$K^*(\bar{q}, r, w) = \bar{q} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w}{r} \right)^{1-\alpha}$$

$$L^*(\bar{q}, r, w) = \bar{q} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^\alpha$$

- (e) Den inverse etterspørselsfunksjonen for kapital, altså prisen på kapital som en funksjon av etterspurt mengde K , er en funksjon $r(K)$. Bruk etterspørselsfunksjonene i (d) til å utlede et uttrykk for r som en funksjon av K , $r(K)$.

Svar:

- (a) Sjekker hvorvidt funksjonen er homogen:

$$Q(tK, tL) = (tK)^\alpha (tL)^{1-\alpha} = t^{\alpha+1-\alpha} K^\alpha L^{1-\alpha} = tK^\alpha L^{1-\alpha} = tQ(K, L)$$

Funksjonen er homogen av grad 1. Dette betyr konstant skalautbytte, men det er ikke forventet at studentene påpeker dette.

- (b) Finner den partielle elastisiteten til Q med hensyn på K :

$$El_K Q(K, L) = \frac{K}{Q(K, L)} \frac{\partial Q(K, L)}{\partial K}$$

$$= \frac{K}{K^\alpha L^{1-\alpha}} \cdot \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

$$= \alpha$$

Studenter som henviser til regneregler for elastisiteter og påpeker at elastisiteten blir α , uten å bruke formelen over, får også full uttelling.

(c) Lagrange-funksjonen er gitt ved:

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = rK + wL - \lambda(K^\alpha L^{1-\alpha} - \bar{q})$$

Førsteordensbetingelsene er gitt ved:

$$\mathcal{L}'_K = r - \lambda\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}'_L = w - \lambda(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha} = 0 \quad (2)$$

$$K^\alpha L^{1-\alpha} = \bar{q} \quad (3)$$

(d) Vi bruker (1) og (2) til å eliminere λ . (1) og (2) gir henholdsvis

$$\lambda = \frac{r}{\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}} \quad \text{og}$$

$$\lambda = \frac{w}{(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha}}$$

Løser for $L(K)$:

$$\frac{r}{\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}} = \frac{w}{(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha}}$$

$$r = \frac{\alpha}{1-\alpha} w \frac{K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}}{K^\alpha L^{-\alpha}}$$

$$r = \frac{\alpha}{1-\alpha} w \frac{L}{K}$$

$$L = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} K$$

Setter inn i (3):

$$K^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} K \right)^{1-\alpha} = \bar{q}$$

$$K \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^{1-\alpha} = \bar{q}$$

$$K^*(\bar{q}, r, w) = \bar{q} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w}{r} \right)^{1-\alpha}$$

Nå kan vi løse for $L^*(\bar{q}, r, w)$:

$$\begin{aligned} L^*(\bar{q}, r, w) &= \frac{1 - \alpha r}{\alpha} \frac{r}{w} \cdot \bar{q} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha r} \frac{w}{r} \right)^{1-\alpha} \\ &= \bar{q} \left(\frac{1 - \alpha r}{\alpha} \frac{r}{w} \right) \left(\frac{1 - \alpha r}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^{\alpha-1} \\ &= \bar{q} \left(\frac{1 - \alpha r}{\alpha} \frac{r}{w} \right)^{\alpha} \end{aligned}$$

(e) Vi bruker løsningen for $K^*(\bar{q}, r, w)$ og løser for r :

$$r(K) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} w \left(\frac{\bar{q}}{K} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Oppgave 4 (20 poeng)

Betrakt funksjonen $f(x, y) = x^2y + y^2$. Anta at $y = y(x)$ er implisitt definert gjennom uttrykket

$$xy + y^2 = 1 \tag{4}$$

- (a) Bruk (4) til å finne et uttrykk for $y'(x)$ gjennom implisitt derivasjon.
- (b) Bruk resultatet fra oppgave (a) til å finne den totalderiverte til $f(x, y)$ med hensyn på x , $\frac{df(x, y(x))}{dx}$.

Svar:

(a) Definerer $y = y(x)$:

$$xy(x) + (y(x))^2 = 1$$

Deriverer (4) med hensyn på x og løser for $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y + xy'(x) + 2yy'(x) &= 0 \\ y'(x)[x + 2y] &= -y \\ y'(x) &= -\frac{y}{x + 2y} \end{aligned}$$

Studentene kan også definere $F(x, y) = xy + y^2$, og bruke

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

for å få samme svar.

(b) Den totalderiverte er gitt ved

$$\frac{df(x, y)}{dx} = f'_x + f'_y \cdot y'(x)$$

Vi fant $y'(x)$ i oppgave (a). Finner f'_x og f'_y :

$$\begin{aligned} f'_x &= 2xy \\ f'_y &= x^2 + 2y \end{aligned}$$

Da får vi

$$\frac{df(x, y)}{dx} = 2xy - \frac{y(x^2 + 2y)}{x + 2y}$$

Oppgave 5 (20 poeng)

Betrakt funksjonen $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 2xy + (y - 1)^2$.

- (a) Utled førsteordensbetingelsene og finn funksjonens stasjonærpunkter.
(b) Klassifiser stasjonærpunktene ved hjelp av andreordensbetingelsene.

Svar:

(a) Førsteordensbetingelsene er gitt ved:

$$f'_x = 2x^2 - 6x + 4 + 2y = 0 \tag{5}$$

$$f'_y = 2x + 2(y - 1) = 0 \tag{6}$$

Fra (6) finner vi $y = 1 - x$. Plugger dette tilbake i (5) og finner:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 4 + 2(1 - x) &= 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Løser for x ved hjelp av abc-formelen:

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4}$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 1$$

De tilhørende y -verdiene blir:

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 1 - 3 = -2$$
$$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 - 1 = 0$$

Vi finner altså to stasjonærpunkter: $(3, -2)$ og $(1, 0)$.

(b) Finner først de andrederiverte og den kryssderivate:

$$f''_{xx} = 4x - 6$$
$$f''_{yy} = 2$$
$$f''_{xy} = 2$$

Vi har også: $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 8x - 16$.

Siden både den andrederiverte mhp. x og Hessian-betingelsen kan være både positiv og negativ i funksjonens definisjonsområde er ingen av stasjonærpunktene globale optimum. Vi sjekker derfor AOB i stasjonærpunktene vi fant:

$(3, -2)$:

$$f''_{xx}(3, -2) \cdot f''_{yy}(3, -2) - (f''_{xy}(3, -2))^2 = 8 > 0$$
$$f''_{xx}(3, -2) = 6 > 0$$
$$f''_{yy}(3, -2) = 2 > 0$$
$$\Rightarrow (3, -2) \text{ er et lokalt minimum}$$

$(1, 0)$:

$$f''_{xx}(1, 0) \cdot f''_{yy}(1, 0) - (f''_{xy}(1, 0))^2 = -8 < 0$$
$$\Rightarrow (1, 0) \text{ er et sadelpunkt}$$